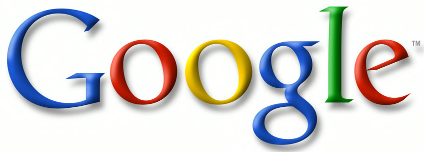
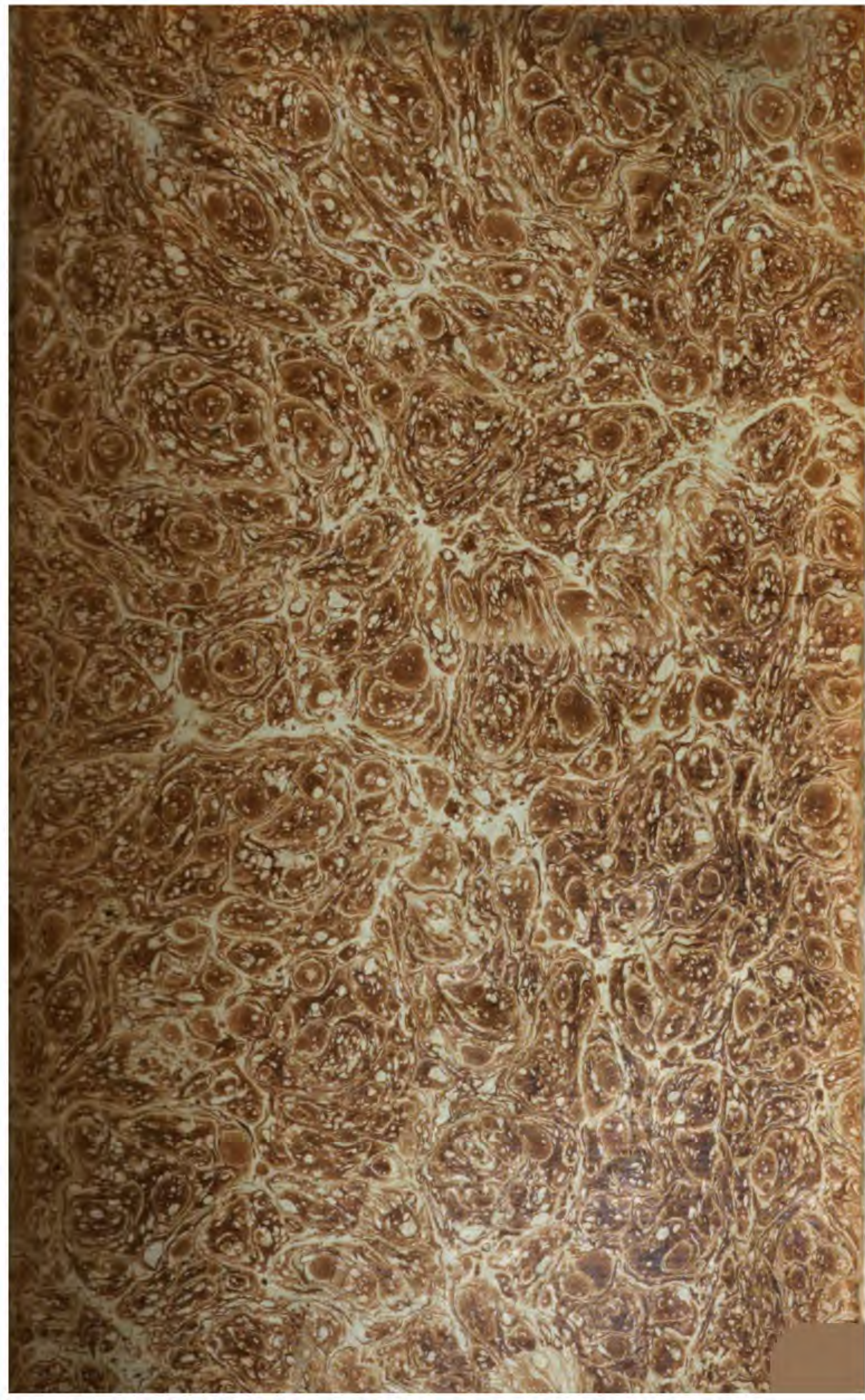






LEÇONS

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Ouvrages du même Auteur qui se trouvent chez le même Libraire.

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE à l'usage des Élèves de tout âge, comprenant l'Arithmétique des Grecs, seconde édition, 1 vol. in-8., 2 fr. 50 c.

ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, à l'usage des Aspirans à l'École Impériale Polytechnique, première section, troisième édit., 1 vol. in-8., 5 fr.

SECONDE SECTION DE L'ALGÈBRE, seconde édit., considérablement augmentée, 1 vol. in-8., 1814, 6 fr.

ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE, avec les deux Trigonométries, suivis d'une introduction à la Géométrie descriptive, et de notions sur la Polygonométrie et le levé des Plans, 1 vol. in-8., avec 12 planches, 5 fr.

LES RÉCIPROQUES DE LA GÉOMÉTRIE, suivies d'un Recueil très-étendu de Théorèmes et de Problèmes, seconde édit., 1 vol. in-8., avec 12 planches, 5 fr.

ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, deuxième édition, considérablement augmentée, avec 14 planches, in-8., 1813, 5 fr. 50 c.

LEÇONS DE STATIQUE, 1 vol. in-8., avec 12 planches, 5 fr.

LEÇONS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL, troisième édit., 1 v. in-8., avec 4 planches, 7 fr.

LEÇONS DE CALCUL INTÉGRAL, troisième édition, 1 vol. in-8., avec 2 planches, 7 fr.

OUVRAGE SUR LE COMPAS DE PROPORTION, suivi d'un Traité de la division des Champs, in-12, 4 fr. 50 c.

RECHERCHES ANALYTIQUES, consignées dans un ouvrage sur la Courbe trisectrice, faisant avec l'ouvrage 1 vol. in-8. conten. 3 pl., 2 f. 50 c.

NOTES sur l'Algèbre de Bezout, faisant avec l'Algèbre un vol. in-8., 5 fr.

NOTES sur le premier volume de l'Algèbre d'Euler; le second volume contient les Notes du Sénateur Lagrange. Prix des deux vol. in-8., 12 fr.

LEÇONS

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL,

PAR J.-G. GARNIER,

Ancien Professeur à l'École Polytechnique, Docteur ès-Sciences, Instituteur à Paris.

TROISIÈME ÉDITION.

PARIS,

Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Lib. pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1811.

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

Ce Traité qui doit comprendre deux parties dont la seconde paraîtra incessamment, compte deux éditions, l'une en un volume in-8°, faisant partie du Cours de Bezout, l'autre in-4°, que je publiai comme professeur à l'École Polytechnique, et qui fut en totalité distribuée aux élèves de cette École. Je songeais depuis longtems à cette troisième édition; mais d'autres occupations et un concours de circonstances peu favorables au débit d'un ouvrage qui sort du cadre des élémens, m'avaient déterminé à l'ajourner : cependant j'ai cédé à la crainte d'être prévenu, et aux desirs de quelques professeurs et de plusieurs élèves, et je suis revenu d'autant plus volontiers à mon projet, que j'avais repris et completté la rédaction du Calcul différentiel à l'occasion d'un cours sur cette matière que je fis l'année dernière à plusieurs de mes élèves, en sorte qu'il ne me restait que le travail de la revision des épreuves.

J'ai pris pour texte de cet Ouvrage la *Théorie des fonctions analytiques* de l'illustre M. *Lagrange*, en employant cependant la notation de *Leibnitz*, adoptée par tous les géomètres du continent; j'ai ajouté des développemens indispensables, et j'ai multiplié les exemples qui sont les véritables interprètes des théories. Ce Traité est divisé en chapitres. J'observerai seulement qu'ayant

eu jusqu'à la fin de l'impression le projet de ne donner que le calcul différentiel, j'ai fait entrer ici des choses qui seraient mieux placées dans le calcul intégral. Au reste, il conviendrait peut-être de mener ensemble, au moins jusqu'à un certain point, ces deux branches de calcul.

L'Ouvrage contient vingt-cinq chapitres dont les quatorze premiers sont consacrés à l'exposition des principes, et les onze derniers aux applications à la géométrie. A l'imitation de M. *Lagrange*, je commence par le développement de $f(x+i)$, c'est-à-dire, par la démonstration de la formule de *Taylor* qui fournit cette conséquence importante que toute fonction d'une seule variable comporte une différentielle de la forme Pdx, dont le coefficient P ne devient ni nul, ni infini, tant qu'on n'assigne à la variable aucune valeur particulière ; de la formule de *Taylor*, je déduis celle de *Maclaurin*. Tel est le résumé des deux premiers chapitres.

On trouve dans les chapitres troisième, quatrième, cinquième et sixième, la différentiation des quantités algébriques et transcendantes à une seule variable, et celle des équations entre deux variables dont l'une est conséquemment fonction de l'autre. A l'égard des transcendantes, j'ai obtenu la différentielle première, ou plutôt le coefficient différentiel du premier ordre, par deux procédés différens : 1°. en développant, par les méthodes connues, la fonction variée jusqu'au terme inclus de première puissance de l'accroissement, qui, d'après la définition, est la différentielle première de laquelle on déduit

les suivantes et les coefficiens différentiels de tous les ordres; en sorte que les développemens indéfinis des fonctions variées, n'exigent que le calcul des deux premiers termes; 2°. en partant, comme l'a fait M. *Poisson*, d'une propriété caractéristique de chaque fonction transcendante, et développant, d'après le théorème de *Taylor*, l'un des membres de l'identité qu'elle fournit, ce qui donne la fonction elle-même développée suivant les puissances de la variable, dont les coefficiens fonctions d'une autre variable combinée avec la première dans la caractéristique, doivent être égalés à des constantes; et comme on prouve que toutes ces constantes ne sont que les puissances de la première qui demeure arbitraire, on a déja le développement de chaque fonction suivant les puissances de la variable, sauf l'évaluation de ce coefficient indéterminé, ce qui ne présente pas de difficultés. D'ailleurs, les égalités précédemment obtenues renferment les coefficiens différentiels d'une fonction absolument semblable à la proposée.

Le chapitre septième offre les formules à l'aide desquelles on rapporte les expressions et les équations différentielles à différentes variables, formules qui sont du plus grand usage dans les applications du calcul différentiel à la géométrie et à la mécanique. Ici nous en montrons l'emploi dans quelques questions d'analyse.

Le chapitre huitième qui traite des équations dérivées et des constantes arbitraires, aurait été renvoyé au calcul intégral auquel il appartient, si je n'avais eu d'abord le projet de m'en tenir au calcul différentiel,

J'ai traité avec beaucoup de soin, dans le neuvième chapitre, le cas en défaut du développement de $f(x+i)$, qui s'offre fréquemment dans les applications à la géométrie, où l'on considère des points particuliers d'une courbe et conséquemment des valeurs particulières de l'abscisse, pour lesquelles les coefficiens différentiels deviennent infinis, circonstance qui avertit que le développement de $f(x+i)$ ne doit plus, ainsi qu'on l'a supposé, procéder suivant les puissances entières et positives de l'accroissement de la variable.

La recherche des valeurs vraies des fractions qui deviennent zéro divisé par zéro dans une seule hypothèse faite sur x, et la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, sont le sujet du onzième chapitre. Dans le fait, la dernière question rentrant dans la première, j'ai dû passer de l'une à l'autre, quoiqu'assez ordinairement on ne traite la décomposition que dans le calcul intégral.

On a vu que toute fonction $f(x+i)$ se développe dans une série qui va à l'infini, à moins que les fonctions dérivées, c'est-à-dire, les coefficiens différentiels de fx, ne deviennent nuls, ce qui a lieu lorsque fx est une fonction rationnelle et entière de la variable x; tant que ce développement ne sert qu'à la génération des fonctions dérivées, il est indifférent que la série aille ou non à l'infini; c'est ce qu'on peut encore dire, lorsqu'on ne considère le développement que comme une simple transformation analytique de la fonction; mais si l'on veut l'employer pour avoir la valeur de la fonction

dans les cas particuliers, comme offrant une expression d'une forme plus simple, à raison de la quantité i qui se trouve dégagée de dessous la fonction, alors ne pouvant tenir compte que d'un certain nombre plus ou moins grand de termes, il est important d'avoir un moyen d'évaluer le reste de la série qu'on néglige, ou du moins de connaître les limites de l'erreur qu'on commet en négligeant ce reste. La détermination de ces limites, ajoute M. *Lagrange*, est sur-tout d'une grande importance dans l'application de la méthode des fonctions à l'analyse des courbes et à la mécanique, pour donner à ces applications la rigueur de l'ancienne géométrie. Dans le onzième chapitre, j'ai donné ces limites de deux manières; d'abord d'après M. *Lagrange* (*Calcul des fonctions*), ensuite en partant d'un développement obtenu à l'aide de l'intégration par parties, ce qui ne suppose que l'emploi de cette formule $\int u dv = uv - \int v du$, dont on reconnaît l'identité par la différentiation.

Le douzième chapitre ne contient que des applications du calcul différentiel aux développemens en séries des fonctions d'une seule variable, et il est terminé par une application de ce calcul à la formation de l'équation finale résultant de l'élimination de x entre deux équations en x et y, l'une du degré m, l'autre du second degré seulement, ce qui n'est, à la vérité, qu'un cas particulier, mais qui cependant peut se présenter assez souvent. J'aurais peut-être mieux fait, pour ne pas interrompre l'exposition des principes, de rassembler dans un seul chapitre toutes les applications du calcul différentiel aux questions

d'analyse, et de commencer ainsi la seconde section de ce Traité.

Dans les treizième et quatorzième chapitres qui terminent l'exposition des principes, je considère les fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes; je démontre, d'après M. *Laplace*, le théorême des fonctions homogènes; je fais quelques applications à des questions d'analyse, et j'assigne encore par les deux méthodes employées plus haut, les limites des développemens de $f(x+i, y+k)$ et $f(x, y)$, les seuls dont on fasse usage dans les applications à la géométrie.

La méthode des tangentes est le sujet du quinzième chapitre qui est le premier des applications du calcul différentiel à la géométrie. Suivant les anciens géomètres, dit M. *Lagrange*, une ligne droite est tangente d'une courbe, lorsqu'ayant un point commun avec cette courbe, on ne peut mener par ce point aucune autre droite entre elle et la courbe; c'est par ce principe qu'ils ont déterminé les tangentes dans le petit nombre de courbes qu'ils ont considérées; mais depuis que par l'application de l'algèbre à la géométrie, les courbes ont été soumises à l'analyse, on a envisagé les tangentes sous d'autres points de vue; on les a regardées comme des sécantes dont les deux points se réunissent, ou comme des prolongemens des côtés infiniment petits de la courbe considérée comme un polygone d'une infinité de côtés, etc. Dans le chapitre suivant, nous traiterons le problême des tangentes sous le premier point de vue, et dans celui-ci, nous regardons la tangente comme une sécante dont les intersections se réunissent.

Dans le chapitre seizième, des contacts et des développées des courbes planes, qui comprend, comme cas particuliers, le problême des tangentes et celui du cercle osculateur ou de courbure, on est conduit à la théorie des asymptotes rectilignes et curvilignes des courbes, en considérant les cas particuliers dans lesquels le développement de $f(x+i)$ échappe à la forme générale, ce qui arrive, comme nous l'avons dit, lorsque, pour une valeur donnée de x, les coefficiens différentiels deviennent infinis, et les puissances de i sont autres que des nombres entiers positifs. Quelques développemens et sur-tout des exemples nous ont paru nécessaires pour l'intelligence de ce point de théorie. C'est dans cette théorie des contacts, qu'on fait un premier emploi des limites du développement de *Taylor*, lorsqu'on veut prouver que si une courbe donnée est touchée par une autre courbe dont l'équation contient n constantes arbitraires déterminées en vertu des égalités entre pareil nombre des premiers termes des développemens de leurs fonctions en $x+i$, x étant l'abscisse du point de contact, aucune autre courbe dont l'équation aurait moins de n constantes arbitraires, ou pour laquelle le même nombre d'égalités n'aurait pas lieu, ne peut passer entre les deux premières.

Lorsqu'on veut assigner l'aire comprise entre l'arc d'une courbe plane, l'axe des abscisses et les deux ordonnées qui la terminent, c'est-à-dire, la forme de la fonction en x qui la représente, on suppose à l'abscisse x un accroissement i, et on a une autre aire dont la différence avec la première, est une nouvelle aire curviligne ayant i

pour base, laquelle est toujours comprise, quelque petit que soit i, entre les aires de deux rectangles ayant même base i; et conséquemment la différence entre l'aire curviligne et l'une quelconque de celles-ci, doit être moindre que la différence entre ces deux dernières. De cette inégalité énoncée au moyen des développemens limités, on déduit le coefficient différentiel de la fonction encore inconnue et représentative de l'aire, en sorte que l'intégration que nous n'effectuons ici que dans des cas très-simples, fait connaître la fonction. Dans la rectification de l'arc, on cherche encore deux limites entre lesquelles soit toujours compris l'accroissement de l'arc correspondant à l'accroissement de i et de x dans la fonction qui représente l'arc à rectifier, et alors par un raisonnement semblable à celui qu'on a fait pour l'aire, on découvre le coefficient différentiel de la fonction à laquelle on repasse par l'intégration. Ces formules pour la quadrature et la rectification des courbes planes avec quelques applications, sont données dans le chapitre dix-septième.

Dans le dix-huitième chapitre, on se propose de rechercher les plus grandes et les moindres valeurs d'une fonction d'une seule variable, question qui, quoiqu'indépendante de la considération des tangentes, peut néanmoins s'y rapporter; en effet, à la seule inspection de la courbe qui est le tableau des valeurs de la fonction représentées par l'ordonnée, on voit que la plus grande et la plus petite valeur de la fonction, ne peuvent être que celles qui répondent aux points dont les tangentes sont parallèles à l'axe des abscisses, et que le *maximum*

a lieu si la courbe présente sa concavité à l'axe, et le *minimum*, si elle présente sa convexité au même axe : or, les expressions des coordonnées du centre du cercle de courbure, rapportées aux points où la tangente est parallèle à l'axe, servent à distinguer, par le signe de y'', si la courbe est concave ou convexe, et conséquemment, s'il y a *maximum* ou *minimum*. Ainsi la question serait généralement résolue, si la fonction y'' ne devenait jamais nulle pour la valeur de l'abscisse qui rend la fonction plus grande ou moindre ; mais comme la chose peut arriver, on a été obligé de recourir à une autre solution de la question, qu'on a tirée de la série de *Taylor*, sans la considération intermédiaire des courbes. Nous avons aussi considéré le cas où la valeur de x, tirée de l'égalité à zéro du coefficient différentiel du premier ordre, rendrait infini l'un des coefficiens différentiels qui doivent rester pour le *maximum* ou le *minimum*.

Le dix-neuvième chapitre traite des points singuliers qui sont les points multiples, les points conjugués, les limites des courbes dans le sens des ordonnées et dans celui des abscisses, et enfin les points d'inflexion et ceux de rebroussement. Le calcul différentiel, dit M. *Poisson*, fournit des règles certaines pour trouver les points d'une courbe, qui peuvent être des points singuliers, lorsqu'on connaît l'équation de cette courbe ; mais pour reconnaître si les points de la courbe, indiqués par le calcul différentiel, sont effectivement des points singuliers, ainsi que pour en reconnaître la nature, il n'y a pas de moyen

plus assuré, du moins en général, que de discuter le cours de la courbe aux environs de ces points. Dans les points d'inflexion qu'il importe plus particulièrement d'examiner, y'' devient nul ou infini, ce qui annonce un passage de la concavité de la courbe à la convexité, ou réciproquement; mais ici, comme dans les autres cas, l'inverse n'a pas lieu. En effet, un point d'inflexion est absolu par sa nature, c'est-à-dire, qu'il reste tel, quel que soit le système d'axes auquel on rapporte la courbe; mais en déplaçant les axes, il peut arriver, et il arrive, en effet, que tel passage de la concavité à la convexité, et réciproquement, cesse d'avoir lieu; ainsi, dans un point d'inflexion, ce passage n'a pas toujours lieu, et ce cas d'exception paraît arriver, lorsque l'axe de la variable indépendante passe par ce point; c'est ce que nous avons montré par des exemples.

Dans le vingtième chapitre, où il est question des courbes polaires, après avoir traduit dans ces coordonnées les expressions de la sous-tangente et de la sous-normale, et les équations de la tangente et de la normale, nous avons donné en coordonnées polaires les expressions usuelles des sous-tangentes et sous-normales comptées sur un axe perpendiculaire au rayon vecteur, à partir du foyer, et celle de la tangente de l'angle entre ce rayon et la tangente; puis nous avons passé à la recherche du rayon et du sous-rayon de courbure, et aux formules des aires et de la rectification des courbes planes; nous avons ensuite recherché les équations et les principales propriétés des spirales d'Archimède, hyperbolique, logarithmique,

et de la courbe trisectrice; et enfin nous avons exposé la génération et donné les équations des courbes conchoïde, cissoïde, logarithmique, sinusoïde, quadratrice et trochoïde.

A la suite des courbes planes qui appartiennent à la géométrie de deux dimensions, nous avons considéré les surfaces courbes et les courbes à double courbure qui rentrent dans la géométrie à trois dimensions. Par rapport aux surfaces, nous avons donné, dans le vingt-unième chapitre, 1°. l'expression d'un volume; 2°. celle d'une surface, l'une et l'autre de révolution. Ici, comme dans la quadrature et la rectification des courbes planes, après avoir représenté, par une fonction de l'abscisse, le volume ou la surface, nous avons recherché deux volumes et deux surfaces qu'on sache exprimer, et qui, quelque petit que soit l'accroissement de la variable contenue dans la fonction, interceptent toujours le volume et la surface représentée par la fonction variée diminuée de la fonction primitive. Alors au moyen de l'inégalité formée des différences entre la grandeur moyenne et l'une des limites et les deux limites, nous avons découvert le coefficient différentiel de chacune des fonctions représentatives du volume et de la surface de révolution. Dans ces solutions, nous avons fait usage des limites de la série de *Taylor*. Nous avons ensuite recherché, 1°. la formule de l'aire d'un cylindre droit, compris entre un arc d'une courbe à double courbure, sa projection horisontale et les deux ordonnées verticales extrêmes; 2°. celle de rectification d'un arc de cette courbe. Or, la solution de

ces deux questions devient facile, en considérant la courbe de projection sur le plan horisontal de la courbe à double courbure, comme l'axe curviligne de cette courbe sur lequel on compte les abscisses, à partir d'un point fixe, les ordonnées étant les arêtes verticales du cylindre droit ayant l'axe curviligne pour contour de la base; car en supposant que l'arc qui sert d'axe des abscisses, soit étendu en ligne droite, on est ramené aux problêmes de la quadrature et de la rectification des courbes planes. Quelques applications terminent ce chapitre.

Le chapitre vingt-deuxième offre la Théorie des contacts et des développées des courbes à double courbure. Après avoir préliminairement trouvé les équations de la tangente à une courbe à double courbure et celle du plan normal, nous avons recherché les formules du rayon du cercle osculateur et des coordonnées de la courbe des centres; nous avons prouvé que cette courbe des centres, ne serait une développée que dans le cas où la courbe proposée serait toute entière dans le même plan. Au reste, pour ne rien laisser à desirer sur cette matière, nous avons démontré, d'après M. *Monge* (*Théorie des surfaces courbes et des courbes à double courbure*), une suite de théorêmes sur les développées des courbes planes et à double courbure; ensuite, et toujours d'après M. *Monge*, nous avons résolu ces deux questions : étant données les équations d'une courbe à double courbure, trouver, 1°. celle de la surface développable, qui est le lieu géométrique de ses développées; 2°. celles de l'arête de rebroussement de la même surface; et nous avons été

conduite de nouveau à la formule déja obtenue du rayon de courbure. Enfin, après avoir défini les points de simple et de double inflexion des courbes à double courbure, nous donnons les formules qui font trouver ces points en même tems que ceux de rebroussement.

Dans le vingt-troisième chapitre où il est question des surfaces courbes, nous donnons d'abord les équations du plan tangent et de la normale, et les expressions des tangentes de l'inclinaison du plan tangent sur le plan horisontal, et de l'angle de la trace horisontale de ce plan avec l'axe des abscisses; puis celles des cosinus des angles de la normale avec les trois axes. Nous étendons ensuite aux surfaces courbes la théorie des contacts, exposée relativement aux lignes courbes, et nous démontrons, 1°. qu'il existe, pour chaque point d'une surface courbe, deux lignes, l'une de plus grande et l'autre de moindre pente ou courbure, qui se coupent à angles droits; 2°. que ces courbes sont les seules sur la surface qui puissent avoir une développée formée par les centres de courbure. Nous terminons ce chapitre par les équations des surfaces cylindrique, conique et de révolution, déduites de la considération du plan tangent.

Lorsqu'il s'agit de la cubature des solides en général, on assigne aisément les expressions des deux volumes entre lesquels est toujours compris l'accroissement du volume cherché, c'est-à-dire, celui qui s'appuie sur le rectangle des accroissemens des variables indépendantes et qui se termine à la surface courbe, en sorte qu'on peut former une inégalité qui devant avoir lieu, quelque petits

que soient les accroissemens des variables indépendantes, donne le coefficient différentiel du second ordre de la fonction inconnue par laquelle on a représenté le volume. Mais la recherche des limites a des difficultés par rapport à la portion de surface qui recouvre le volume, et M. *Lagrange* n'a pas traité cette question : pour la résoudre d'après les mêmes principes, j'ai d'abord supposé la portion de surface qui recouvre le parallélipipède qui s'appuie sur le rectangle des accroissemens des variables indépendantes, toute entière concave ou convexe vers le plan horisontal, et telle qu'elle ne renferme pas de points singuliers, et j'ai démontré que cette surface parallélogrammique est comprise entre celles des deux parallélogrammes tangens menés par les extrémités de la plus grande et de la plus petite ordonnée, et inscrite entre les faces du parallélipipède : alors il restait à évaluer ces limites ; cela fait, on obtenait, comme dans le cas précédent, le coefficient différentiel du second ordre de la fonction par laquelle on a représenté la surface. Dans ces deux questions qui sont le sujet du vingt-quatrième chapitre, on emploie les limites des développemens d'une fonction de deux variables.

Enfin, le dernier chapitre de l'Ouvrage contient la théorie des plus grandes et des moindres fonctions de deux et d'un nombre quelconque de variables indépendantes. J'ai considéré le cas où il existait entre plusieurs de ces variables une ou plusieurs relations données qui doivent être en plus petit nombre que ces variables, et celui où les coefficiens différentiels prennent des valeurs infinies.

Il me reste à parler des notes qui sont à la suite de l'Ouvrage. Celles qui se rapportent au texte, sont au nombre de quatre : la première renferme une démonstration du théorême de *Taylor*, due à M. *Poisson*, et consignée dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique*; dans la seconde, je donne, d'après M. *Lagrange* (*Calcul des fonctions*), une détermination annoncée dans le texte, du coefficient qui reste indéterminé dans la série du sinus suivant les puissances de l'arc; dans la troisième, je démontre, ainsi que je l'ai encore annoncé dans l'Ouvrage, que quel que soit l'exposant d'un binome, le coefficient numérique du second terme du développement, est toujours égal à cet exposant; enfin, comme le théorême des limites des développemens des fonctions d'une et de deux variables, sert, comme on l'a vu, de fondement aux applications du calcul différentiel, j'en donne une nouvelle démonstration tirée du grand *Traité de Calcul différentiel et intégral* de M. *Lacroix*, qui a paru au moment où l'on imprimait ces notes.

J'ai pensé qu'il convenait de faire connaître la méthode *infinitésimale* et celle des *limites*, parce que, dans la mécanique et dans toutes les applications, on emploie toujours la première, et qu'assez généralement on expose le calcul différentiel par la seconde. Ainsi j'ai refait, par les infiniment petits, non-seulement les chapitres de l'Ouvrage que leur emploi abrégeait, mais encore d'autres solutions, dans le seul but de familiariser le lecteur avec ces considérations. De cette manière, l'identité de la méthode du texte et de la méthode infinitésimale étant prouvée par celle des

résultats, j'ai été dispensé de m'étendre sur les principes de celle-ci, qu'on trouve discutés avec une rare sagacité dans un excellent écrit de M. *Carnot*, ayant pour titre : *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal ou différentiel.* Quant à la seconde méthode généralement adoptée dans l'enseignement, il me semble que ce que j'en ai dit, suffit pour mettre le lecteur en état de faire lui-même le calcul différentiel par les limites. Ici j'ai démontré, d'après MM. *Ampère* et *Binet aîné*, que toute fonction d'une seule variable comporte une différentielle première qui ne peut devenir nulle ou infinie tant qu'on laisse la variable indéterminée, théorème fondamental lorsqu'on veut débuter par les règles de la différentiation, à la suite desquelles je donne une démonstration de la série de *Taylor*, encore due à M. *Ampère*, et qui, dans cette nouvelle distribution des matières, ne devient nécessaire que lorsqu'on passe aux applications.

TABLE
DES CHAPITRES.

FIN DE LA TABLE DES CHAPITRES.

ERRATA.

Page 14, ligne 3, $\Delta^{(n-1)} =$, *lisez :* $\Delta^{(n-1)} y =$.

15, 10, $x + 1 =$, *lisez :* $f(x+i) =$.

23, 11, $+ p\mathrm{d}q +$, *lisez :* $+ b\mathrm{d}q +$.

35, 10 *en remont.*, $P' = -Aa^{-x}$, *lisez :* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -Aa^{-x}$.

44, 9, par le carré du, *lisez :* par la racine carrée du.

63, 6 *en remontant*, $\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}\right)}{\mathrm{d}x}$, *lisez :* $\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right)}{\mathrm{d}x}$.

71, 6 *en remontant*, $= e^{x\sqrt{-1}}$, *lisez :* $e^{\pm x\sqrt{-1}}$.

82, 8, $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^3}$, *lisez :* $\frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}y^3}$.

85, 9 *en remontant*, $+\frac{h^7}{7}$, *lisez :* $-\frac{h^7}{7}$.

88, 4, $A' + B'u^2 + C'u^3 + E'u^4 + \ldots$, *lisez :* $A' + B'u + C'u^2 + E'u^3 + \ldots$

89, 9, $x + 1 =$, *lisez :* $f(x+i) =$.

Id. 10 *en remontant*, x' et y, *lisez :* x et y.

108, 11 *en remontant*, si Fx et fx, *lisez :* si Fx et φx.

123, 11, $a^2 - a^2 +$, *lisez :* $a^2 - i^2 +$.

141, dernière, $(P'Q - PQ'^2 \frac{\cot\varphi}{\cos\varphi}$, *lisez :* $(P'Q - PQ') \frac{\cot\varphi}{\cos\varphi}$.

142, 4 *en remontant*, (pag. 137), *lisez :* (pag. 138).

143, 3, (pag. 137), *lisez :* (pag. 138).

Id. 4 *en remontant*, $\pm 2\sqrt{-1} -$, *lisez :* $\pm 2\sqrt{-1}$.

172, 10, $\pm \frac{(y^{n^0})}{1.2.3\ldots(n-1)} x^n$, *lisez :* $\frac{y^{n^0}}{1.2.3\ldots(n-1)} x^{n-1}$.

181, 3, $\beta = -a.\gamma =$, *lisez* $\beta = -a, \gamma =$.

186, 5 *en remontant*, $\frac{\mathrm{d}^{m+n} u}{\mathrm{d}x^m \mathrm{d}x^n \mu}$, *lisez :* $\frac{\mathrm{d}^{m+n} u}{\mathrm{d}x^m \mathrm{d}y^n}$.

189, 4, $F(x+y) = 0$, *lisez :* $F(x, y) = 0$.

192, 4 *en remontant*, $f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y) =$, *lisez :* $f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}x) = u$.

Page 193, ligne 5, $f(x+dx, y+dx) =$, *lisez* : $f(x+dx, y+dy) =$.

195, 3, $= \frac{d^3u}{dx^2dy} =$, *lisez* : $= \frac{d^3u}{dx\,dy\,dx}$.

209, 4 *en remontant*, de z, *lisez* : de fz.

211, 6 *en remontant*, $\frac{y^2}{2}((fy)^2)'$, *lisez* : $\frac{y^2}{2}((fx)^2)'$.

237, 1re. $\frac{db}{dx} \cdot \frac{da}{dx}$, *lisez* : $\frac{db}{dx} : \frac{da}{dx}$, les deux points désignant un quotient.

240, 11, $r = \frac{\left(1+\frac{1}{x'^2}\right)}{-\frac{x''}{x'^3}} =$, *lisez* : $r = \frac{\left(1+\frac{1}{x'^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{x''}{x'^3}} =$;

242, 15, l'angle $QM'Q$, *lisez* : l'angle $QM'Q'$.

Id. 9 *en remontant*, $QI = AQ'$, *lisez* : $QI = A'Q'$.

258, 6, $= APMm - RMm =$, *lisez* : $= APMn - RMn =$.

267, 7, du centre osculateur, *lisez* : du centre du cercle osculateur.

282, 4 *en remontant*, $\frac{dy^m}{dx^n}$, *lisez* : $\frac{d^ny}{dx^n}$.

284, 13, si ce point, *lisez* : si chacun de ces points.

295, 8, $x = \sqrt[4]{3ab^2}$, *lisez* : $\sqrt[3]{3ab^2}$.

303, 9, par rapport à x, *lisez* : par rapport à y.

309, 2, $x = 0$, *lisez* : $x = 0$, $y = 0$.

311, 4 *en remontant*, x et y et φ, *lisez* : x, y et ρ.

312, 7 *au dénominateur de la sous-normale*, *lisez* : . . . $\cos\varphi \frac{d\rho}{d\varphi} - \rho \sin\varphi$.

319, 12, $= -\frac{\rho^2 d\varphi}{d\varphi}$, *lisez* : $-\frac{\rho^2 d\varphi}{d\rho}$.

320, 11 *en remontant*, $y \rho \sin\varphi$, *lisez* : $y = \rho \sin\varphi$.

334, 7 *en remontant*, $x(y+h)^2 i$, *lisez* : $x(y+k)^2 i$.

337, 6 *en remontant*, $= z\,dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)}$, *lisez* :.....
$= z\,dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

ERRATA.

Page 340, ligne 10 *en remont.*, $= \frac{b^2}{a^2}(ax-x)$, *lisez* : $= \frac{b^2}{a^2}(ax-xx)$.

354, les douze dernières lignes se rapportent à la fig. 48.

376, 6 en remontant, x, y, z, a, b, c, d, R, *lisez* : x, y, z, a, b, c, R.

379, 8, par les rayons de courbure, *lisez* : par les centres des cercles de courbure.

383, dernière, $\frac{dS}{dF}$, *lisez* : $\frac{dZ}{dF}$.

429, 9 *en remontant*, $\frac{i}{x} =$, *lisez* : $\frac{i}{x} = y$.

431, dernière, $\frac{d^{n+3}u}{dx^{n+3}} \frac{i}{n+1}$, *lisez* : $\frac{d^{n+3}u}{dx^{n+3}} \frac{i^n}{n+3}$.

435, 7 *en remontant*, $\frac{d^6u}{dx^6} \frac{i}{4.5}$, *lisez* : $\frac{d^5u}{dx^5} \frac{i^2}{4.5}$

LEÇONS

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

DANS l'Algèbre ordinaire, on distingue les quantités en *connues* et en *inconnues*, et on a coutume de désigner les unes par les premières lettres de l'alphabet, et les autres par les dernières.

L'application de l'algèbre à la théorie des courbes, a fait d'abord distinguer les quantités qui entrent dans l'équation d'une courbe, en *données*, telles que les axes, les paramètres, etc., et en *indéterminées*. Depuis, on a envisagé ces mêmes quantités sous l'aspect plus naturel de *constantes* et de *variables*.

Une expression analytique de forme quelconque, qui renferme des variables et des constantes, s'appelle *fonction de ces variables*.

Nous désignerons les variables de la fonction par x, y, z, etc., et les constantes par a, b, c, etc. Pour marquer une fonction d'une seule variable comme x, nous ferons simplement précéder cette variable de la caractéristique f ou F, sans mettre en évidence les constantes qui se trouvent combinées avec la variable sous le signe f ou F; mais lorsqu'il s'agira de désigner

la fonction d'une quantité déja composée de cette variable, comme x^2,.... $a+bx$, etc., il faudra renfermer cette quantité entre deux parenthèses : ainsi $f(x^2)$, $f(a+bx)$ etc., désigneront des fonctions de x^2, de $a+bx$, etc.

Lorsqu'une équation entre deux variables x et y, est résolue par rapport à y, par exemple, en sorte qu'on ait

$$y=fx,$$

on dit que y est une *fonction explicite* de x ; mais si y dépend de x par l'équation

$$f(x, y)=0,$$

on dit que y est une *fonction implicite* de x.

Celle des deux variables qui est sous le signe de fonction dans $y=fx$, est dite *variable principale* ou *indépendante*, et l'autre est la *variable dépendante*.

Il y a lieu aux mêmes distinctions dans les fonctions de plusieurs variables x, y, z, etc. liées par une seule équation ; cette équation peut être ou n'être pas résolue par rapport à l'une des variables, et, dans le premier cas, les variables qui sont sous le signe fonction, sont dites *variables principales* ou *indépendantes*, parce que des valeurs successives attribuées à celles-ci, dépendent celles de la variable par rapport à laquelle l'équation est résolue.

Les fonctions se distinguent encore en *fonctions algébriques*, *fonctions transcendantes*, *fonctions intranscendantes*.

Les premières sont celles qui peuvent toujours être ramenées à une forme rationnelle sous un nombre fini de termes.

Les secondes contiennent des exponentielles, des logarithmes, des lignes trigonométriques, des arcs de cercle, etc.

Les troisièmes enfin, ainsi nommées par *Leibnitz*, parce qu'elles tiennent, pour ainsi dire, le milieu entre les deux

premières, sont celles dans lesquelles les exposans des variables sont irrationnels, comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc.

A la naissance du Calcul différentiel, dit *Lagrange*, on n'avait pas encore une idée assez étendue de ce qu'on entend par *fonction*.

« Les premiers analystes n'avaient employé ce mot que pour « désigner les différentes puissances d'une même quantité, et « on en a ensuite étendu la signification à toute quantité « formée d'une manière quelconque d'une autre quantité; il est « aujourd'hui généralement adopté pour exprimer que la va- « leur d'une quantité dépend, suivant une loi donnée, d'une « ou de plusieurs autres quantités données. »

« Sous ce point de vue, on doit regarder l'algèbre comme « la science des fonctions, et il est aisé de voir que la réso- « lution des équations ne consiste, en général, qu'à trouver « les valeurs des quantités inconnues en fonctions déterminées « des quantités connues. Ces fonctions représentent alors les « opérations qu'il faut faire sur les quantités connues pour « obtenir les valeurs de celles que l'on cherche, et elles ne « sont, à proprement parler, que le dernier résultat du « calcul. »

« Mais en algèbre, on ne considère les fonctions qu'autant « qu'elles résultent des opérations de l'arithmétique, généra- « lisées et transportées aux lettres; au lieu que, dans le calcul « dont il va être question, on considère les fonctions qui « résultent de l'opération algébrique du développement, lors- « qu'on attribue à une ou plusieurs des quantités de la fonc- « tion, des accroissemens indéterminés. »

CHAPITRE PREMIER.

Développement de f(x + i) *suivant les puissances ascendantes, entières et positives de* i, x *et* i *étant quelconques. Un terme quelconque de ce développement peut être rendu plus grand que la somme de tous les suivans.*

Soit fx *une fonction quelconque de* x; *si on augmente* x *d'une quantité quelconque* i, *la fonction variée* f(x + i) *pourra toujours se développer suivant les puissances croissantes, entières et positives de* i, *la variable* x *restant indéterminée, c'est-à-dire, ne prenant aucune valeur particulière.*

Il s'agit donc de démontrer que, lorsqu'on ne prononce rien sur x, on doit avoir

$$f(x+i)=fx+Pi+P'i^2+P''i^3+\text{etc.}$$

D'abord puisque la *fonction non développée* $f(x+i)$ doit devenir fx pour $i=0$, le développement doit, sous la même hypothèse, se réduire à fx qui sera conséquemment son premier terme, ou le terme sans i.

Je dis, en second lieu, que ce développement ne peut comporter un seul terme de puissance négative, ou fractionnaire de i.

Supposons d'abord que l'un de ses termes puisse être.... Gi^{-m} ou $\frac{G}{i^m}$: pour $i=0$, le terme $\frac{G}{i^m}$ deviendrait $\frac{G}{0}=\infty$, en sorte qu'on aurait

$$fx=\infty \quad \text{ou} \quad \frac{1}{fx}=0,$$

équation de laquelle on tirerait des valeurs particulières de x, et l'on a supposé que la variable x restait indéterminée.

Passons au second cas, et soit l'un des termes $Gi^{\frac{m}{n}}$ ou $G\sqrt[n]{i^m}$: il est clair que les radicaux qui sont dans la fonction fx, se retrouvent tous et sous les mêmes indices dans $f(x+i)$, et qu'ainsi les fonctions $f(x+i)$ et fx prennent le même nombre de valeurs, en observant que tout radical a autant de valeurs différentes qu'il y a d'unités dans son exposant, et que toute fonction irrationnelle a, par conséquent, autant de valeurs différentes qu'on peut faire de combinaisons des différentes valeurs des radicaux qu'elle renferme. Donc, si le développement $f(x+i)$ pouvait contenir un terme tel que $Gi^{\frac{m}{n}}$, chaque valeur de fx se combinerait avec chacune des n valeurs du radical $\sqrt[n]{i^m}$, de sorte que la fonction développée aurait plus de valeurs différentes que la même fonction non développée $f(x+i)$, ce qui est absurde.

Cette démonstration suppose, à la vérité, que les radicaux de fx qui repassent dans $f(x+i)$, conservent leurs indices dans les fonctions de x, représentées par P, P', P'', etc. ; c'est ce que prouvera la détermination par le *calcul différentiel* de ces coefficiens P, P', P'', etc.

Ce développement de $f(x+i)$ est donc vrai tant que x et i restent indéterminés, ce qui n'aurait plus lieu, si on donnait à x des valeurs déterminées ; car il serait possible que ces valeurs détruisissent dans fx quelques radicaux qui pourraient néanmoins subsister dans $f(x+i)$.

Pour donner un seul exemple de cette circonstance, soit

$$fx = Fx \times \sqrt[m]{x-a},$$

Fx étant une fonction de x sans radicaux; la fonction...

$f(x+i)$ sera $F(x+i)\sqrt[m]{x-a+i}$; et pour $x=a$, valeur qui anéantit le radical dans fx, on aura

$$f(a+i)=F(a+i)\times\sqrt[m]{i},$$

en sorte que le développement de $f(x+i)$, pour $x=a$, contiendra des puissances fractionnaires de i. Si l'on suppose encore

$$fx=\sqrt{x+a};$$

auquel cas

$$f(x+i)=\sqrt{(x+a)+i}=(x+a)^{\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}(x+a)^{-\frac{1}{2}}i$$
$$+M(x+a)^{-\frac{3}{2}}i^2+\text{etc.},$$

on voit que si l'on fait $x=-a$, hypothèse sous laquelle le radical disparaît dans fx, les coefficiens de i, i^2, etc., deviennent infinis, et en même tems, la fonction $f(x+i)$ devient $\sqrt{i}$.

Mais nous examinerons à part ces sortes de cas et les conséquences qui en résultent.

On peut concevoir le développement général formé comme il suit. On a d'abord

$$f(x+i)=fx+ip$$

en désignant par ip la totalité du développement, à l'exception du premier terme, en sorte que

$$ip=Pi+P'i^2+P''i^3+\text{etc.}$$
$$=i(P+P'i+P''i^2+\text{etc.})$$

d'où, après la division par i.

$$p=P+P'i+P''i^2+\text{etc.}$$

Ainsi P est ce que devient p, ou $\frac{f(x+i)-fx}{i}$, en y

faisant $i=0$. On aura donc, pour $i=0$,

$$P=\frac{f(x+i)-fx}{i} \quad \ldots\ldots (1)$$

On a ensuite

$$p=P+iq,$$

en posant

$$iq=P'i+P''i^2+P'''i^3+\text{etc.}$$

d'où, après la division par i,

$$q=P'+P''i+P'''i^2+\text{etc.};$$

ainsi P' est ce que devient q en faisant $i=0$ dans q ou dans $\frac{p-P}{i}$: nous poserons donc, pour $i=0$,

$$P'=\frac{p-P}{i} \quad \ldots\ldots (2).$$

Si l'on fait

$$ir=P''i+P'''i^2+\text{etc}, \quad \text{d'où } r=P''+P'''i+\text{etc.}$$

on aura

$$q=P'+ir;$$

Ainsi P'' est ce que devient r, ou $\frac{q-P'}{i}$ pour $i=0$; c'est ce que nous noterons ainsi,

$$P''=\frac{q-P'}{i} \quad \ldots\ldots (3)$$

pour $i=0$. Dans la même hypothèse,

$$P'''=\frac{r-P''}{i} \quad \ldots\ldots (4)$$

et ainsi des autres coefficiens. Ces coefficiens P, P', P'', P''', etc., sont donc les valeurs vraies des fractions $\frac{f(x+i)-fx}{i}$,

$\frac{p-P}{i}$, $\frac{q-P'}{i}$, $\frac{r-P''}{i}$, etc., qui toutes se réduisent à $\frac{0}{0}$ dans la seule hypothèse $i=0$ (Alg., 1re. sect.).

Aussi, dit Lagrange, Calcul des Fonctions, page 318 :
« Ceux qui, d'après *Euler*, regardent les différentielles « comme de véritables zéro, et par conséquent leur rapport « comme celui de zéro à zéro, sont dans toute la rigueur de « l'analyse, etc. » C'est donc sur cette considération que nous établirons le Calcul qui est l'objet de ce Traité.

Nous avons vu que le coefficient P de la première puissance de i dans le développement de $f(x+i)$, était la valeur vraie de la fraction $\frac{f(x+i)-fx}{i}$ pour $i=0$; mais toute fraction qui devient $\frac{0}{0}$ lorsqu'on attribue à une seule des quantités qu'elle contient, une valeur particulière, prend pour valeur vraie, soit zéro, soit l'infini, soit enfin une fonction des quantités qu'elle contient (Alg., 1re. sect.) : or nous ferons voir, dans le chapitre suivant, que la variable x restant indéterminée, la fonction P ne peut être ni nulle, ni infinie.

Le développement de $f(x+i)$ peut, sous ces abréviations

$$\begin{aligned} p &= P + P'i + P''i^2, + \text{etc.} \\ q &= P' + P''i + P'''i^2, \quad \text{etc.} \\ r &= P'' + P'''i + P^{\text{IV}}i^2, \quad \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

être mis sous l'une quelconque de ces formes

$$\begin{aligned} f(x+i) &= fx + pi \\ &= fx + Pi + qi^2, \\ &= fx + Pi + P'i^2 + ri^3 \\ &= fx + Pi + P'i^2 + P''i^3 + si^4, \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

et alors il devient facile de démontrer qu'on peut toujours assigner pour i une valeur telle que l'un quelconque des termes de la suite qui représente $f(x+i)$, l'emporte sur la somme de tous les suivans, théorême qui est d'un grand usage dans les applications de ce calcul à la géométrie des courbes.

En effet, i n'étant pas dans fx, ni dans les fonctions P, P', P'', etc., on peut toujours concevoir i tellement petit qu'on ait 1°.

$fx > pi$, et conséquemment

$$fx > Pi + P'i^2 + P''i^3 + \text{etc.}$$

2°. $P > qi$, d'où $Pi > qi^2$, c'est-à-dire,

$$Pi > P'i^2 + P''i^3 + P'''i^4 + \text{etc.};$$

3°. $P' > ri$, d'où $P'i^2 > ri^3$, c'est-à-dire,

$$P'i^2 > P''i^3 + P'''i^4 + P^{\text{iv}}i^5 + \text{etc.}$$

et ainsi de chacun des autres termes du développement, par rapport à la somme de ceux qui le suivent.

CHAPITRE II.

Des Théorêmes de Taylor et de Maclaurin.

Considérons une fonction quelconque de la variable x, que nous désignerons par fx. Nous avons démontré que le développement de $f(x+i)$, lorsque x étoit quelconque, procédait toujours suivant les puissances ascendantes entières et positives de i, et que le terme sans i de ce développement était la fonction primitive elle-même, c'est-à-dire, fx. Il reste maintenant à déterminer les fonctions de x qui multiplient les puissances de i, ou, au moins, à rechercher comment ces fonctions dépendent de la fonction primitive.

A cet effet, donnons à la variable ou à l'abscisse x une suite de valeurs x, x', x'', x''', etc., en progression par différences égales, et soient y, y', y'', y''', etc., les valeurs correspondantes de la fonction fx ou de l'ordonnée y; si on dénote la différence entre deux ordonnées consécutives, par le signe Δ appliqué à l'ordonnée qu'on retranche, différence qui peut être en plus ou en moins, on aura cette suite de *différences premières*.

$$y'-y=\Delta y,\ y''-y'=\Delta y',\ y'''-y''=\Delta y'',\ y^{\text{IV}}-y'''=\Delta y''',\ \text{etc.}\ldots(1)$$

Si on considère les différences entre ces différences successives Δy, $\Delta y'$, $\Delta y''$, etc., et qu'on applique toujours le signe Δ à la différence retranchée, on aura cette suite de *différences secondes*.

$$\Delta y'-\Delta y=\Delta^2 y,\ \ \Delta y''-\Delta y'=\Delta^2 y',\ \ \Delta y'''-\Delta y''=\Delta^2 y''\ldots.(2).$$

On aurait pareillement cette suite de *différences troisièmes*, donnée par les différences entre les différences secondes consécutives

$$\Delta^2 y' - \Delta^2 y = \Delta^3 y,\ \Delta^2 y'' - \Delta^2 y' = \Delta^3 y',\ \text{etc.} \ldots\ldots \quad (3)$$

et généralement

$$\Delta^{(n-1)} y' - \Delta^{(n-1)} y = \Delta^{(n)} y \ldots\ldots\ldots \quad (M)$$

$(n-1)$ et (n) étant des nombres d'accens.

De toutes ces suites, on déduit facilement celles-ci

$$\begin{aligned}
y' &= y + \Delta y = y + \Delta y \\
y'' &= y' + \Delta y' = y + 2\Delta y + \Delta^2 y \\
y''' &= y'' + \Delta y'' = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y \\
y^{\text{iv}} &= y''' + \Delta y''' = y + 4\Delta y + 6\Delta^2 y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

On remarque dans tous ces développemens, 1°. que les coefficiens numériques sont ceux de la puissance d'un binome, marquée par le nombre qui compterait les accens de la fonction y qu'on développe ; 2°. que le premier terme est toujours la fonction primitive, ou la première ordonnée ; 3°. que les indices du Δ vont toujours croissant d'une unité depuis zéro, en regardant y comme $\Delta^0 y$, jusqu'au nombre des accens de l'ordonnée qu'on considère.

Il est donc naturel de supposer

$$y^{(n)} = y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y + \text{etc.} \ldots (N);$$

mais la relation entre $y^{(n+1)}$, y', et les différences successives relatives à y', devant être la même que celle qui a lieu entre $y^{(n)}$, y et les différences relatives à y, on aura

$$y^{(n+1)} = y' + n\Delta y' + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y' + \frac{n(n-1)(n-2)\Delta^3 y'}{1.2.3} + \text{etc.};$$

en sorte que si on remplace y', $\Delta y'$, $\Delta^2 y'$, etc. par leurs valeurs tirées des égalités (1), (2), et (3), etc., on trouvera

$$y^{(n+1)} = y + (n+1)\Delta y + \frac{(n+1)n}{1.2}\Delta^2 y$$
$$+ \frac{(n+1)\,n(n-1)}{1.2.3}\Delta^3 y + \text{etc.}$$

Or $(n+1)$, $\frac{(n+1)n}{1.2}$, $\frac{(n+1)\,n(n-1)}{1.2.3}$, etc., sont

aussi les coefficiens numériques d'un binome élevé à la puissance $n+1$: donc ces coefficiens ayant été vérifiés jusqu'au développement de $y^{(n)}$, auront encore lieu en passant de ce développement à celui de $y^{(n+1)}$, dans lequel la loi des différences de y est d'ailleurs la même que dans $y^{(n)}$.

Si l'on observe que $y^{(n)}$ est l'ordonnée qui répond à l'abscisse $x^{(n)}$, et qu'aussi les abscisses x, x', x'', x''',....$x^{(n)}$, forment une progression croissante dont la différence est constante, on aura d'après la notation déja convenue,

$$x' - x = \Delta x,\quad x'' - x = 2\Delta x,\quad x''' - x = 3\Delta x,\ \text{etc.},$$

et conséquemment

$$x' = x + \Delta x,\ x'' = x + 2\Delta x,\ x''' = x + 3\Delta x \ldots x^{(n)} = x + n\Delta x.$$

Si donc on fait $n\Delta x = i$, d'où $\Delta x = \frac{i}{n}$, et qu'on se rappelle que $y^{(n)} = f(x + n\Delta x) = f(x+i)$, (N) deviendra

$$f(x+i) = fx + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y + \text{etc.} \ldots (N')$$

or, il a été démontré (chap. 1er.) que si dans fx on change x en $x+\Delta x$, le développement de $f(x+\Delta x)$ est de la forme

$$f(x+\Delta x) = fx + P\Delta x + P'\Delta x^2 + P''\Delta x^3 + \text{etc.} \ldots (4)$$

P, P', P'', etc, étant des fonctions de x; donc, à cause de $f(x+\Delta x)=y'$, lorsque $y=fx$, on aura

$$y'-y=\Delta y=P\Delta x+P'\Delta x^2+P''\Delta x^3+P'''\Delta x^4,+\text{ etc.} \quad (5)$$

Pour passer du Δy au $\Delta y'$, et conclure le développement du $\Delta^2 y$, il faut dans Δy, c'est-à-dire, dans P, P', P'', etc., changer x en $x+\Delta x$; et comme alors P deviendra

$$P+P_{,}\Delta x+P_{,,}\Delta x^2+\text{ etc.},$$

P' deviendra

$$P'+P_{,}'\Delta x+P_{,,}'\Delta x^2+\text{ etc.}$$

P'' deviendra

$$P''+P_{,}''\Delta x+P_{,,}''\Delta x^2+\text{ etc.}$$

etc.

il s'ensuit que la différence $\Delta y'-\Delta y$, c'est-à-dire, $\Delta^2 y$ sera, après les réductions,

$$\Delta^2 y=Q\Delta x^2+Q'\Delta x^3+Q''\Delta x^4+\text{ etc......} \quad (6)$$

où Q représente $P_{,}$.

Pour former le $\Delta^3 y$, on composera $\Delta^2 y'$ par la substitution $x+\Delta x$ pour x dans $\Delta^2 y$, ou dans Q, Q', Q'', etc, ce qui changera Q en

$$Q+Q_{,}\Delta x+Q_{,,}\Delta x^2,\text{ etc.}$$

Q' en

$$Q'+Q_{,}'\Delta x+Q_{,,}'\Delta x^2,\text{ etc.}$$

Q'' en

$$Q''+Q_{,}''\Delta x+Q_{,,}''\Delta x^2,\text{ etc.}$$

etc.

et la différence $\Delta^2 y'-\Delta^2 y=\Delta^3 y$ deviendra, après les réductions,

$$\Delta^3 y=R\Delta x^3+R'\Delta x^4+R''\Delta x^5+\text{ etc.....} \quad (7)$$

où R représente $Q_{,}$.

On trouvera de même

$$\Delta^4 y = S\Delta x^4 + S'\Delta x^5 + S''\Delta x^6 + \text{etc.}\ldots\ldots \quad (8)$$
$$\vdots$$
$$\Delta^{(n-1)} = U\Delta x^{n-1} + U'\Delta x^n + U''\Delta x^{n+1} + \text{etc.}$$
$$\Delta^{(n)} y = V\Delta x^n + V'\Delta x^{n+1} + V''\Delta x^{n+2} + \text{etc.}$$

Ces substitutions faites dans (N') pour Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, etc., donneront

$$f(x+i) = fx + n\left\{P\Delta x + P'\Delta x^2 + \text{etc.}\right\}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\left\{Q\Delta x^2 + Q'\Delta x^3 + \text{etc.}\right\}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left\{R\Delta x^3 + R'\Delta x^4 + \text{etc.}\right\}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\left\{S\Delta x^4 + S'\Delta x^5 + \text{etc.}\right\}$$
$$+ \text{etc.}$$

Qu'en place de Δx et de ses puissances dans le développement, on mette $\frac{i}{n}$, et les puissances correspondantes : on aura cette nouvelle forme de développement,

$$f(x+i) = fx + n\left\{P\frac{i}{n} + P'\frac{i^2}{n^2} + \text{etc.}\right\}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\left\{Q\frac{i^2}{n^2} + Q'\frac{i^3}{n^3} + \text{etc.}\right\}\ldots(N'')$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left\{R\frac{i^3}{n^3} + R'\frac{i^4}{n^4} + \text{etc.}\right\}$$
$$+ \text{etc.}$$

Mais à cause de $i = n\Delta x$, on voit que i ne variera pas si l'on prend des sous-multiples quelconques de Δx avec les mul-

tiples correspondans de n, et $\frac{i}{n}$ variera dans les mêmes hypothèses; donc on ne doit retenir du développement (N'') de $f(x+i)$ que les termes indépendans de $\frac{i}{n}$; autrement la fonction développée aurait beaucoup plus de valeurs que la même fonction non-développée, ce qui impliquerait contradiction. Ainsi après avoir exécuté toutes les multiplications dans le développement (N''), il faut rejeter la totalité des termes multipliés par $\frac{i}{n}$, quelles que soient les puissances de i et de n. Ce développement se réduit donc à

$$f(x+i)=fx+Pi+Q\frac{i^2}{1.2}+R\frac{i^3}{1.2.3}+S\frac{i^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}.(N''')$$

Ici les fonctions P, Q, R, S; etc., sont les valeurs vraies de ces rapports

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=P+P'\Delta x+\text{etc.} \ldots . (a)$$

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}=Q+Q'\Delta x+\text{etc.} \ldots . (b)$$

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}=R+R'\Delta x+\text{etc.} \ldots . (c)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\Delta^{(n-1)} y}{\Delta x^{n-1}}=U+U'\Delta x+\text{etc.} \ldots . (m)$$

$$\frac{\Delta^{(n)} y}{\Delta x^n}=V+V'\Delta x+\text{etc.} \ldots . (n)$$

etc.

dans l'hypothèse $\Delta x=0$, pour laquelle on a $\Delta y=0$,....

$\Delta^2 y = 0$, $\Delta^3 y = 0$, ... $\Delta^{(n-1)} y = 0$, $\Delta^{(n)} y = 0$, puisqu'alors y', y''..... redeviennent y.

Il est essentiel d'observer que l'hypothèse du $\Delta x = 0$ n'a pour objet que de faire trouver, d'une manière abrégée, les fonctions P, Q, R, etc., qu'on pourrait obtenir sans rien prononcer sur Δx, en effectuant la totalité des développemens de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, etc., dont on ne prendrait ensuite que le premier terme ou le terme sans Δx; en sorte que cette hypothèse n'influe pas sur l'accroissement de i, et ne le détruit pas, comme on aurait pu le penser d'abord.

Ainsi, d'après (4), la fonction P est le coefficient de la première puissance du Δx dans le développement de .... $f(x + \Delta x)$; elle est aussi d'après (*a*) la valeur vraie du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, pour $\Delta x = 0$.

La fonction Q ou $P_{\prime}$ n'est que le coefficient du Δx dans le développement de P, après le changement de x en $x + \Delta x$. Cette fonction Q est encore, d'après (*b*), la valeur vraie du rapport $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, pour $\Delta x = 0$.

La fonction R ou $Q_{\prime}$ est le coefficient du Δx dans le développement de Q après le changement de x en $x + \Delta x$: R est dans (*c*) la valeur vraie de $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$, pour $\Delta x = 0$.

Et ainsi des fonctions suivantes S, T, etc. du développement (N''').

Pour rappeler en même tems l'origine et la dérivation successives de ces fonctions P, Q, R, etc., nous les remplacerons dans le développement (N''') par $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, etc., en changeant cependant Δ en d, pour dire que ces rapports ne

correspondent à ces fonctions que pour $\Delta x = 0$, ou que lorsqu'ils sont rigoureusement $\frac{0}{0}$, auquel cas P, Q, R, etc. en sont les valeurs vraies.

On aura donc, en partant de $y = fx$,

$$f(x+i) = fx + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}i + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\frac{i^2}{1.2} + \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}\frac{i^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

formule donnée d'abord par *Newton*, à la fin du livre des Principes pour l'Interpolation des lieux des comètes, et ensuite appliquée par *Taylor* au cas où l'accroissement i devient infiniment petit.

Les coefficiens $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$, etc., se lisent ainsi : dy *sur* dx, d^2y *sur* dx^2, d^3y *sur* dx^3, etc., et non pas dy *divisé par* dx, d^2y *divisé par* dx^2, etc., parce qu'ici $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, etc., ne sont pas des rapports, mais de simples notations qui rappellent des valeurs vraies, ou des premiers termes.

Ainsi, d'après les développemens (*a*), (*b*), (*c*), etc., et les notations convenues, on a

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P,\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = Q,\ \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = R \ldots \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}} = U,\ \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} = V, \text{ etc.}$$

Nous appellerons *différentielles* les termes successifs du développement de la différence finie $f(x+i) - fx$, pris abstraction faite des dénominateurs numériques 1.2, $1.2.3$, etc. ; mais comme pour rappeler que nous ne considérions que le premier terme du Δy, ou plutôt du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, nous changions Δ en d, de même ici, nous noterons par dy la première portion $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}i$ de l'accroissement total $f(x+i) - fx$; et c'est ce premier terme que nous nommerons *différentielle première*.

2

Le terme $\frac{d^2y}{dx^2}i^2$ qui est le premier de la différence entre $f(x+i)-fx$ et dy, se nommera *différentielle seconde*, et on la notera par d^2y

Le terme $\frac{d^3y}{dx^3}i^3$ par lequel commence le développement de la différence entre $\{f(x+i)-fx\}-\frac{dy}{dx}i$, et d^2y sera la *différentielle troisième*, qu'on notera par d^3y.

Et ainsi de suite. Calculer les différentielles successives de fx, c'est donc préparer, aux diviseurs numériques près, les élémens du développement de $f(x+i)$: tel est l'objet de *la différentiation*.

Rien n'empêche de remplacer dans le développement de $f(x+i)$, et dans les différentielles qui n'en sont que les différens termes, aux diviseurs numériques près, i par dx, l'accroissement dx étant fini comme i : et alors les différentielles et le développement s'énoncent ainsi :

$$dy=\frac{dy}{dx}dx,\quad d^2y=\frac{d^2y}{dx^2}dx^2,\quad d^3y=\frac{d^3y}{dx^3}dx^3,$$

$$f(x+dx)=y+dy+\frac{1}{1.2}d^2y+\frac{1}{1.2.3}d^3y+\frac{1}{1.2.3.4}d^4y+\text{etc.}$$

On observera que la grandeur de l'accroissement dx qui est en facteur dans le développement et dans les différentielles, n'influe en aucune manière sur le mode suivant lequel chacune des fonctions $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ dérive de y et de la précédente (pag. 16).

Ainsi, on emploiera ces abréviations de calcul. On écrira dans la fonction proposée $x+dx$ pour x ; on développera jusqu'au terme de dx inclusivement, et ce terme sera la *différentielle première* Pdx notée par dy. Dans P on changera x en $x+dx$, on

développera seulement jusqu'au terme de dx, lequel, multiplié par dx facteur dans Pdx, sera la *différentielle seconde* Qdx^2, notée par d^2y. On fera la même substitution dans Q, le développement jusqu'à dx inclusivement; on multipliera ce terme par dx^2 facteur dans Qdx^2, et on aura *la différentielle troisieme* Rdx^3 rappelée par d^3y, et ainsi des autres différentielles. Il suffira donc, pour chaque fonction, de savoir former sa différentielle première.

D'où il résulte encore 1°. que pour avoir la différentielle seconde, il faut différentier le coefficient du dx dans la différentielle première, et multiplier par dx.

2°. Que pour avoir la différentielle troisième, il faut différentier le coefficient du dx^2 dans la différentielle seconde, et multiplier par dx^2.

3°. Que pour obtenir la différentielle quatrième, il faut différentier le coefficient du dx^3 dans la différentielle troisième, puis multiplier par dx^3.

Et ainsi de suite.

Nous avons dit que le coefficient P ne pouvait être ni nul, ni infini : supposons d'abord qu'il puisse être nul, et représentons-le par φx, qu'il faut lire : *fonction de x*.

Nous avons démontré que, de la même manière que Q dérive de P, R dérive de Q, S dérive de R, etc., dans le développement

$$f(x+i) = fx + Pi + Qi^2 + Ri^3 + \text{etc.},$$

donc P étant la fonction primitive φx, on doit avoir

$$\varphi(x+i) = P + Qi + Ri^2 + Si^3 + \text{etc.}$$

Or, la fonction P, c'est-à-dire, φx étant identiquement nulle, puisqu'autrement de $P=0$, on tirerait des valeurs particulières de x, tandis que la variable x est quelconque, on aurait $\varphi(x+i)$ identiquement nulle, quel que fût l'accrois-

sement i; et conséquemment de l'hypothèse $P=0$, on déduirait

$$Q=0,\quad R=0,\quad S=0,\ \text{etc.};$$

d'où on conclurait

$$f(x+i)=fx;$$

donc fx serait une fonction de constantes, ou une fonction identiquement nulle. Ainsi l'hypothèse $P=0$ est inadmissible. Qu'on ait P infini, $f(x+i)$ sera infinie, sans que fx le soit, puisque x est quelconque, ce qui est absurde; car $f(x+i)$ est composée en $x+i$ comme fx l'est en x.

Ainsi toute fonction de x admet des différentielles successives, lorsqu'on ne prononce rien sur x.

Ces notations $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., sont encore dites *coefficiens différentiels*, parce qu'en effet les facteurs P, Q, R, etc., qui en sont les valeurs vraies, sont aussi les facteurs de dx, dx^2, dx^3, etc., dans les différentielles successives : d'ailleurs, comme le coefficient Q n'est que le coefficient différentiel dans la différentielle de P; qu'aussi R n'est que le coefficient différentiel dans la différentielle de Q, et qu'il en est de même de chaque coefficient par rapport à celui d'où il dérive, on a, d'après la manière de noter les coefficiens différentiels

$$Q=\frac{dP}{dx},\quad R=\frac{dQ}{dx},\quad S=\frac{dR}{dx},\ \text{etc.}$$

c'est-à-dire,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx};\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx};\quad \frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)}{dx},\ \text{etc.}$$

transformations qui nous serviront par la suite.

Si, dans $f(x+i)$, on fait $x=0$, l'accroissement i redevient x, ce que l'on comprendra mieux si l'on considère x comme l'abscisse d'une courbe, et y comme l'ordonnée correspondante : cette abscisse devenant nulle, l'accroissement i de x se compte de l'origine, et devient l'abscisse de l'ordonnée fi : alors, les fonctions de x, désignées par $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., qu'on note assez souvent par y', y'', y''', etc., deviennent, ainsi que fx, des fonctions de constantes ; si donc, pour $x=0$, on les distingue par y^0, y'^0, y''^0, etc., on aura

$$fi=(y^0)+(y'^0)\,i+(y''^0)\frac{i^2}{1.2}+(y'''^0)\frac{i^3}{1.2.3}+\text{ etc.}$$

Tel est le théorême de *Maclaurin*, qui sert à développer une fonction de i ou de x, suivant les puissances croissantes, entières et positives de la variable : mais ce développement peut être en défaut, parce qu'il résulte de celui de $f(x+i)$ en attribuant à x la valeur particulière $x=0$. Ce cas sera le sujet d'un examen particulier.

CHAPITRE III.

Différentiation des fonctions quelconques d'une seule variable.

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, que la formation du développement général d'une fonction quelconque $f(x+dx)$, se réduisait à la détermination du coefficient P ou $\frac{dy}{dx}$, puisque de la même manière que P dérive de y ou de fx, Q dérive de P, R de Q, etc. Nous nous proposons, dans ce chapitre, de déterminer le $\frac{dy}{dx}$ pour les fonctions composées d'une manière quelconque de la seule variable x, mais formées de diverses fonctions de x combinées par addition, soustraction, multiplication, division, élévation de puissances, extraction de racines: et d'abord nous procéderons à la recherche des différentielles de la fonction

$$y = fx = ap + bq + cr + \text{etc.}$$

p, q, r, etc. étant des fonctions algébriques de x, et a, b, c, etc. des constantes. On écrira $x + dx$ pour x dans chacune des fonctions p, q, r, etc.: alors

p devient $p + p'dx + p''dx^2 + \text{etc.}$
q devient $q + q'dx + q''dx^2 + \text{etc.}$
r devient $r + r'dx + r''dx^2 + \text{etc.}$
s devient $s + s'dx + s''dx^2 + \text{etc.}$
etc.

en sorte que

$$\begin{aligned} f(x+dx) &= ap + bq + cr + \text{etc.},\\ &+(ap' + bq' + cr' + \text{etc.})dx,\\ &+(ap'' + bq'' + cr'' + \text{etc.})dx^2;\\ &+\text{etc.} \end{aligned}$$

or, d'après la définition de la différentielle première,

$$dy = ap'dx + bq'dx + cr'dx + \text{etc.};$$

mais $p'dx$, $q'dx$, $r'dx$, etc., sont les différentielles des fonctions p, q, r, etc.

On aura donc cette autre énonciation du dy, savoir :

$$dy = adp + pdq + c.dr + \text{etc.}$$

En sorte que, *pour différentier une somme de fonctions de x, il faut différentier, en particulier, chacune de ces fonctions, comme si les autres étaient constantes.*

Ces fonctions p, q, r, etc., pourraient, à la vérité, renfermer des expressions en x, telles que $\frac{a+bx}{a'+b'x+c'x^2}$, $\sqrt[m]{a+bx}$, etc. que nous ne savons pas encore différentier; cependant il est toujours démontré que, quelle que soit la composition de ces fonctions, il faut différentier chacune d'elles, comme si elle était seule, sauf à donner des règles pour les différens cas qui peuvent se présenter.

Si y, au lieu d'être une somme, est un produit de fonctions, et qu'on ait d'abord

$$y = apq,$$

p et q ayant été définies plus haut, et a étant une constante : après la substitution faite de $x+dx$ pour x, p se changera en

$$p + p'dx + p''dx^2 + \text{etc.},$$

et q en

$$q + q'dx + q''dx^2 + \text{etc.},$$

la fonction proposée devient donc

$$f(x + dx) = apq + (aqp' + apq')\,dx + Qdx^2 + \text{etc.};$$

retranchant de part et d'autre le premier terme du développement qui est toujours la fonction donnée, puis passant à la différentielle, on trouve

$$dy = aqp'dx + apq'dx.$$

Or, $p'dx$, $q'dx$ sont encore les différentielles de p et de q. Donc

$$dy \text{ ou } d(apq) = aq.dp + ap.dq;$$

et de là on déduit cette règle : *pour différentier un produit* pq *de deux fonctions de* x, *il faut différentier séparément par rapport à chacune des deux fonctions, en regardant l'autre comme constante, et la somme des différentielles, est la différentielle du produit.*

Généralisons, et supposons

$$y = fx = apqr:$$

par la substitution de $x + dx$ pour x,

p devient $\quad p + p'dx + p''dx^2 + \text{etc.},$

q devient $\quad q + q'dx + q''dx^2 + \text{etc.},$

r devient $\quad r + r'dx + r''dx^2 + \text{etc.},$

en sorte que, faisant le produit de ces trois développemens, on trouvera

$$f(x + dx) = apqr + a(qrp' + rpq' + pqr')\,dx + Qdx^2 + \text{etc.}$$

et de là, on déduit la différentielle

$$dy = aqrp'dx + arpq'dx + apqr'dx,$$

où $p'dx$, $q'dx$, $r'dx$ sont les différentielles dp, dq, dr. On peut donc énoncer ainsi la différentielle dy,

$$dy \text{ ou } d(apqr) = aqr.dp + arp.dq + apq.dr;$$

on n'a encore différentié que par rapport à chacune des fonctions successivement, regardée comme seule variable, les deux autres étant considérées comme constantes.

On étendrait ce procédé à un produit d'un nombre quelconque de pareilles fonctions, tel que

$$y = apqrs \text{ etc.};$$

et on trouverait

$$dy = aqrs\ldots dp + aprs\ldots dq + apqs\ldots dr + apqr\ldots ds + \text{etc.}$$

Nous déduirons de là la règle générale pour différentier la fonction $y = x^m$, m étant un nombre entier positif : en effet, si l'on met x^m sous la forme d'un produit, on aura

$$y = x.x.x.x\ldots\ldots$$

et conséquemment, en différentiant successivement par rapport à chacun des facteurs x, comme si les autres étaient constans, on aura

$$dy = x^{m-1}\,dx + x^{m-1}\,dx + x^{m-1}\,dx + \text{etc.}$$

Comme ces termes sont en nombre m, leur somme sera

$$dy = mx^{m-1}\,dx.$$

Nous aurions pu déduire cette expression de la différentielle de x^m, des deux premiers termes du binome; mais nous n'avons pas voulu supposer la connaissance de ce développe-

ment, parce que le calcul différentiel en offre une démonstration très-générale et très-simple,

Il nous reste à différentier une fraction $\frac{p}{q}$: nous poserons donc

$$y = fx = \frac{p}{q};$$

remplaçant toujours x par $x + dx$, nous aurons

$$f(x + dx) = \frac{p + p'dx + p''dx^2 + \text{etc.}}{q + q'dx + q''dx^2 + \text{etc.}}.$$

La division du numérateur par le dénominateur, donnera ce quotient,

$$f(x + dx) = \frac{p}{q} + \left(\frac{p'}{q} - \frac{pq'}{q^2}\right)dx + Qdx^2 + \text{etc.}$$

$$= \frac{p}{q} + \left(\frac{p'q - pq'}{q^2}\right)dx + Qdx^2 + \text{etc.}$$

Le premier terme du développement répète toujours la fonction primitive, en sorte que retranchant $\frac{p}{q}$, ou y, de part et d'autre, et passant à la différentielle, on trouve

$$dy = \frac{qp' - pq'}{q^2}dx = \frac{qp'dx - pq'dx}{q^2}.$$

Or, $p'dx$ et $q'dx$ sont les différentielles de p et de q; on a donc

$$dy \text{ ou } d\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{qdp - pdq}{q^2}.$$

Ainsi, *pour différentier une fraction, il faut multiplier le dénominateur par la différentielle du numérateur; de ce produit, retrancher celui du numérateur par la différentielle*

du dénominateur, et diviser cette différence par le carré du dénominateur.

Nous conclurons d'abord de la différentielle de x^m, obtenue pour m nombre entier et positif, celles des fonctions $x^{\frac{m}{n}}$, $x^{-\frac{m}{n}}$.

Soit $y=x^{\frac{m}{n}}$, d'où $y^n=x^m$. Soit de plus $y^n=z$, et conséquemment $z=x^m$. Puisque

$$z=x^m,\quad z=y^n;$$

on a, en même tems,

$$dz=mx^{m-1}\,dx,\quad dz=ny^{n-1}\,dy;$$

d'où

$$mx^{m-1}\,dx=ny^{n-1}\,dy,$$

et conséquemment

$$dy \quad\text{ou}\quad d\left(x^{\frac{m}{n}}\right)=\frac{m}{n}\cdot\frac{x^{m-1}}{y^{n-1}}\,dx.$$

Mettant pour y^{n-1} sa valeur $x^{m-\frac{m}{n}}$, on aura

$$d\left(x^{\frac{m}{n}}\right)=\frac{m}{n}\,x^{\frac{m}{n}-1}\,dx.$$

Soit, en second lieu, $y=x^{-\frac{m}{n}}$; d'où $y^n=x^{-m}=z$, et conséquemment

$$y^n=z,\quad \frac{1}{x^m}=z:$$

d'abord on a

$$dz=ny^{n-1}\,dy,$$

puis en comparant $\frac{1}{x^m}$ avec $\frac{p}{q}$, ce qui donne $p=1, q=x^m$,

on trouve

$$dz = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}\,dx = -mx^{-m-1}\,dx,$$

de ces deux valeurs de dz, on tire

$$dy \text{ ou } d\left(x^{-\frac{m}{n}}\right) = -\frac{m}{n}\,x^{-\frac{m}{n}-1}\,dx.$$

Ainsi, *pour différentier* x^m, *quel que soit le nombre* m, *il faut écrire l'exposant de* x *en coefficient de cette variable sous le même exposant diminué d'une unité, et multiplier par* dx (*).

Ainsi m étant un nombre quelconque, on a ces différentielles successives de x^m,

$$d(x^m) = mx^{m-1}\,dx$$
$$d^2(x^m) = m.m-1.x^{m-2}\,dx^2$$
$$d^3(x^m) = m.m-1\,m-2.x^{m-3}\,dx^3;$$
etc.

substituant les coefficiens différentiels qu'on en déduit à la place de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., dans le théorême de Taylor, considéré dans le cas de $fx = x^m$, on aura

$$(x+i)^m = x^m + m.x^{m-1}i + m.\frac{m-1}{2}x^{m-2}i^2$$
$$+ m.\frac{m-1}{2}\,\frac{m-2}{3}x^{m-3}i^3 + \text{etc.}$$

A la différentielle de $x^{\frac{m}{n}}$, ou de $\sqrt[n]{x^m}$, se rapporte celle de toute fonction irrationnelle et algébrique de la seule variable x. Qu'on ait, par exemple,

$$y = fx = \sqrt[n]{a^2 + x^2},$$

(*) *Voyez* 1ère. note une autre manière de parvenir aux différentielles de $x^{\frac{m}{n}}$ et $x^{-\frac{m}{n}}$.

on posera $z = a^2 + x^2$, et on aura à différentier $z^{\frac{1}{n}}$; ainsi,

$$dy = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz = \frac{dz}{n\sqrt[n]{z^{n-1}}};$$

d'ailleurs $dz = 2x dx$; donc

$$dy = \frac{2x dx}{n\sqrt[n]{(a^2+x^2)^{n-1}}},$$

et, pour $n = 2$,

$$dy = \frac{x dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Toutes les règles données précédemment seront mises en pratique dans la différentiation de la fonction

$$fx = \frac{(a-x)^m \sqrt[n]{b^2-x^2}}{x^k \sqrt[l]{\frac{a-x}{b+x}}} + \frac{a}{x^2-a^2} - \sqrt[f]{ax-x^2};$$

car en posant

$$\frac{(a-x)^m \sqrt[n]{b^2-x^2}}{x^k \sqrt[l]{\frac{a-x}{b+x}}} = p, \quad \frac{a}{x^2-a^2} = q, \quad -\sqrt[f]{ax-x^2} = r,$$

on a

$$y = p + q + r;$$

dont la différentielle est

$$dy = dp + dq + dr.$$

Or, pour différentier plus commodément la fonction p, on fera

$$(a-x)^m = z, \quad \sqrt[n]{b^2-x^2} = u, \quad x^k = t, \quad \sqrt[l]{\frac{a-x}{b+x}} = v,$$

en sorte que $p=\frac{zu}{tv}$, ou z, u, t, v sont des fonctions de x, et on pourra encore représenter zu par P, et tv par Q, ce qui donnera, en dernier lieu, $p=\frac{P}{Q}$, et conséquemment

$$dp=\frac{QdP-PdQ}{Q^2};$$

mais

$$dP=udz+zdu, \quad dQ=vdt+tdv,$$

et

$$dz=-m(a-x)^{m-1}dx,$$

pour différentier u, on pourra représenter b^2-x^2 par U, ce qui donnera $u=U^{\frac{1}{n}}$, d'où $du=\frac{1}{n}U^{\frac{1}{n}-1}dU$; et comme $dU=-2xdx$, on aura,

$$du=-\frac{2}{n}(b^2-x^2)^{\frac{1}{n}-1}xdx=-\frac{2}{n}\frac{xdx}{(b^2-x^2)^{\frac{n}{-1}}},$$

$$dt=kx^{k-1}dx.$$

Il reste à trouver dv; à cet effet, on fera $\frac{a-x}{b+x}=X$, d'où

$$v=\sqrt[l]{X} \quad \text{et} \quad dv=\frac{1}{l}X^{\frac{1}{l}-1}dX;$$

or $$dX=\frac{(b+x)d(a-x)-(a-x)d(b+x)}{(b+x)^2};$$

et en effectuant les différentiations indiquées $d(a-x)$, $d(b+x)$, on a $dX=\frac{-(b+x)dx-(a-x)dx}{(b+x)^2}$; donc

$$dv=-\frac{1}{l}\left(\frac{b+x}{a-x}\right)^{\frac{l-1}{l}}\frac{(b+a)dx}{(b+x)^2}.$$

On a donc tout ce qu'il faut pour former la différentielle dp; ensuite

$$dq = -\frac{2\,ax\,dx}{(x^2 - a^2)^2},$$

en observant que la différentielle du numérateur, dans la fraction $\frac{a}{x^2 - a^2}$ étant nulle, il n'y a plus qu'à multiplier le numérateur, pris avec un signe contraire, par la différentielle du dénominateur, et diviser par le carré du dénominateur (26, 27). Il sera facile de former dr. La somme de ces trois différentielles est la différentielle cherchée.

Nous nous en tiendrons à ce seul exemple; mais nous inviterons les élèves à en faire beaucoup d'autres, pour se familiariser avec les règles de la différentiation.

CHAPITRE IV.

De la Différentiation des quantités transcendantes.

Les quantités transcendantes que nous allons traiter, sont les exponentielles à exposans variables, les logarithmes, les lignes trigonométriques, et les arcs donnés par ces lignes.

Il résulte de la forme du développement de la fonction $f(x + dx)$, démontrée quelle que soit la fonction $y = fx$, algébrique ou transcendante, et de la définition (pag. 17), que la différentielle première de toute fonction d'une seule variable, est de la forme Pdx, P étant une fonction de x, qui dépend nécessairement de la fonction donnée.

Nous parviendrons par deux méthodes bien distinctes aux différentielles des fonctions que nous venons d'énoncer.

Nous considérerons en premier lieu, $y = fx = a^x$, d'où on déduit $f(x + i) = a^{x+i} = a^x . a^i$: il suffit donc de trouver les deux premiers termes de la série a^i, développée suivant les puissances ascendantes de i.

Soit, à cet effet, $a = 1 + b$; alors $a^i = (1 + b)^i$, et (pag. 28)

$$(1 + b)^i = 1 + ib + \frac{i(i-1)}{2} b^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{2.3} b^3 + \text{etc.}$$

Si l'on ne veut retenir de ce développement que les termes multipliés par la première puissance de i, il faudra ne multiplier i facteur dans chaque terme, que par le produit des nombres soustraits de i dans chacun des autres facteurs, et par la puissance de b, puis diviser par le dénominateur. Ainsi, en

désignant par A le coefficient de i, on trouvera facilement d'après la loi connue des coefficiens en i,

$$A = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{etc.}$$

Ainsi les deux premiers termes de a^i seront $1 + Ai$, et conséquemment les deux premiers termes de a^{x+i} seront $a^x + Aa^x.i$; d'où l'on déduit, d'après la notation des différentielles et des coefficiens différentiels,

$d(a^x) = Aa^x dx$		$\frac{dy}{dx} = Aa^x$
$d^2(a^x) = A^2a^x dx^2$		$\frac{d^2y}{dx^2} = A^2a^x$
$d^3(a^x) = A^3a^x dx^3$	d'où	$\frac{d^3y}{dx^3} = A^3a^x$
$d^4(a^x) = A^4a^x dx^4$		$\frac{d^4y}{dx^4} = A^4a^x$
etc.		etc.

La substitution de ces valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., dans la série de *Taylor* (pag. 17), donnera ce développement de l'exponentielle a^{x+i},

$$a^{x+i} = a^x + Aa^x i + A^2a^x \frac{i^2}{1.2} + A^3a^x \frac{i^3}{1.2.3} + A^4a^x \frac{i^4}{1.2.3.4} + \text{etc.},$$

qui, pour $x = 0$, devient celui de a^i; ainsi

$$a^i = 1 + Ai + \frac{A^2i^2}{1.2} + \frac{A^3i^3}{1.2.3} + \frac{A^4i^4}{1.2.3.4} + \text{etc.};$$

et changeant i en x,

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \frac{A^4x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}\,.(1)(*)$$

Pour la valeur particulière $x = \frac{1}{A}$ dans (1), la série devient numérique ; et si on représente la base correspondante par e, on aura

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.};$$

c'est-à-dire,

$$e = 2,71828\ 18284\ 59045\ \ldots$$

de sorte que la relation entre A et e se trouve exprimée d'une manière finie par l'équation

$$a^{\frac{1}{A}} = e, \quad \text{ou} \quad a = e^A \ldots (2)$$

(*) Si l'on suppose les développemens de a^x, $\log x$, $\sin x$, etc. donnés dans l'algèbre, il devient alors très-facile de trouver la différentielle première de chacune de ces fonctions, de laquelle on conclut ensuite les différentielles consécutives. En effet, en partant pour la fonction dont il s'agit, de ce développement connu

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^3x^3}{3} + \text{etc.}$$

et démontré (*Alg.*, 2e. sect.), on différentiera de part et d'autre, ce qui donnera

$$d(a^x) = A dx\left(1 + Ax + \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^3x^3}{3} + \frac{A^4x^4}{4}, \text{etc.}\right)$$

Or, si l'on observe que la série entre les parenthèses, est encore le développement de a^x, on aura

$$d(a^x) = Aa^x dx,$$

ce qui est la différentielle première trouvée.

Les logarithmes calculés sur cette base e, s'appellent *logarithmes népériens*; et pour les distinguer des *logarithmes tabulaires*, calculés sur la base 10, nous désignerons les premiers par la seule lettre l; ainsi, de la relation précédente, on déduira

$$la = A.$$

A est donc le *logarithme népérien* de la base quelconque a. Introduisant cette détermination dans les différentielles trouvées plus haut, on aura

$d(a^x) = la \,.a^x dx$	$d(e^x) = e^x dx$
$d^2(a^x) = (la)^2.a^x dx^2$	$d^2(e^x) = e^x dx^2$
$d^3(a^x) = (la)^3.a^x dx^3$	$d^4(e^x) = e^x dx^3$
$d^4(a^x) = (la)^4.a^x dx^4$	$d^4(e^x) = e^x dx^4$
etc.	etc.

en observant que, d'après (2), a devient e, lorsque A ou la devient l'unité.

Pour l'exponentielle $y = a^{-x}$, on doit prendre $P' = -Aa^{-x}$, et conséquemment $d(a^{-x}) = -(la)\, a^{-x}\, dx$, ... $d^2(a^{-x}) = (la)^2\, a^{-x}\, dx$ etc.

Avant d'aller plus loin, nous ferons connaître une manière abrégée d'énoncer la série de *Taylor*. Si dans (1) on fait $A = 1$, a deviendra e, et on aura

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}:$$

qu'on remplace dans cette identité, x par $\frac{dy}{dx}i$, et on trouvera

$$e^{\frac{dy}{dx}i} = 1 + \frac{dy}{dx}i + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{i^2}{1.2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 \frac{i^3}{1.2.3} + \text{etc.};$$

d'où

$$e^{\frac{dy}{dx}i} - 1 = \frac{dy}{dx}i + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{i^2}{1.2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 \frac{i^3}{1.2.3} + \text{etc.};$$

mais

$$f(x+i) - fx = \Delta(fx) = \frac{dy}{dx}i + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{i^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^4}\frac{i^3}{1.2.3} \text{ etc.}$$

donc on pourra poser $\Delta(fx) = e^{\frac{dy}{dx}i} - 1$, en observant de changer, dans le développement de $e^{\frac{dy}{dx}i}$, les exposans des puissances de dy en indices de différentielles.

Nous avons donc obtenu en même tems les différentielles successives des exponentielles a^x, e^x, et les développemens de ces exponentielles suivant les puissances ascendantes entières et positives de x.

De là, on conclut aisément les différentielles des logarithmes : car de $a^x = y$, on déduit

$$x = \log y;$$

log se rapportant à la base générale a. Or, d'après . . . ; $d(a^x) = la.a^x dx$, on a

$$dx = \frac{d(a^x)}{la.a^x} = \frac{dy}{y.l.a},$$

et conséquemment

$$d(\log y) = \frac{dy}{y.la}.$$

Pour différentier les logarithmes népériens, on fera $la = 1$, et la différentielle précédente deviendra

$$d(ly) = \frac{dy}{y}.$$

Ainsi, 1°. *la différentielle première d'une exponentielle, est le produit du logarithme népérien de la base, par l'exponentielle et par la différentielle de la variable qui est en exposant de la base; 2°. la différentielle première du logarithme d'une variable, est le quotient de la différentielle de cette variable, divisée par le produit de la variable par le logarithme népérien de la base.*

On a ces différentielles successives de $\log y$, savoir :

$$d^2(\log y) = -\frac{dy^2}{y^2 . la},\ d^3(\log y) = \frac{2dy^3}{y^3 la},\ d^4(\log y) = -\frac{6dy^4}{y^4 la}.$$

Mais en partant de $a^y = x$, afin d'avoir

$$y = \log x = fx,$$

les différentielles précédentes deviendraient

$$dy = \frac{dx}{x . la},\ d^2y = -\frac{dx^2}{x^2 . la},\ d^3y = \frac{2dx^3}{x^3 . la},\ d^4y = -\frac{6dx^4}{x^4 la},\ \text{etc.},$$

et on en déduirait ces coefficiens différentiels

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xla},\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2la},\ \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3la},\ \frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{6}{x^4la},\ \text{etc.};$$

donc, si l'on fait ces substitutions dans le développement de $f(x+i)$, on aura celui de $\log(x+i)$, savoir:

$$\log(x+i) = \log x + \frac{i}{x . la} - \frac{i^2}{2x^2 . la} + \frac{i^3}{3x^3 . la} - \frac{i^4}{4x^4 . la} + \text{etc.}$$

Par l'hypothèse $x = 0$, et le changement de i en x, cette série devient

$$\log x = \infty + \frac{i}{0} - \frac{i^2}{0}\ \text{etc.}$$

Ainsi, à l'égard de cette fonction, le théorême de *Maclaurin* (pag. 21) est en défaut.

Considérons, en troisième lieu, les lignes trigonométriques sin x, cos x, tang x, et recherchons les développemens de sin x et cos x, qui, par le changement de x en i, deviendront ceux de sin i et de cos i: alors, il sera facile de trouver le terme de première puissance de i, tant de...... sin $(x+i)$ que de cos $(x+i)$, terme qui, d'après la définition, sera la différentielle.

Soit

$$\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}=f\varphi,$$

f étant un signe de fonction : on aura

$$\cos t+\sin t\sqrt{-1}=ft.$$

Mais le produit des deux premiers membres étant........... $\cos(\varphi+t)+\sin(\varphi+t)\sqrt{-1}$, et ce produit étant composé en $\varphi+t$ de la même manière que chacun des facteurs l'est en φ et en t, on aura nécessairement

$$\cos(\varphi+t)+\sin(\varphi+t)\sqrt{-1}=f(\varphi+t)$$

c'est-à-dire,

$$f\varphi\times ft=f(\varphi+t),$$

ce qui est l'équation de définition des fonctions exponentielles. On peut donc poser

$$f\varphi=a^\varphi,\quad \text{ou}\quad \cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}=a^\varphi.$$

Mais soit qu'on élève a^φ à la puissance m, soit qu'on change φ en $m\varphi$, on obtient toujours $a^{m\varphi}$: on a donc l'identité

$$\cos m\varphi+\sin m\varphi\sqrt{-1}=(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})^m,$$

et conséquemment

$$\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}=(\cos m\varphi+\sin m\varphi\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}\ \ldots.\ (A).$$

Maintenant, quelle que soit l'expression de sin x en série suivant l'arc x, elle ne peut être que de la forme....... $Ax+Bx^2+$ etc., en observant que l'arc et le sinus de-

viennent nuls en même tems. Or, comme $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$, on aura

$$\cos x = .\left\{1 - A^2x^2 - 2ABx^3 - \text{etc.}\right\}^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{A^2x^2}{2} - \text{etc.}$$

Les coefficiens A, B, etc., étant indépendans de l'arc x, resteront les mêmes, lorsque x deviendra mx. Ainsi

$$\sin mx = mAx + m^2Bx^2 + \text{etc.},$$

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2A^2x^2}{2} + \text{etc.},$$

donc l'équation (A) deviendra, après y avoir changé ϕ en x,

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = \left[1 + mAx\sqrt{-1} + m^2\left(B\sqrt{-1} - \frac{A^2}{2}\right)x^2 + \text{etc.}\right]^{\frac{1}{m}}.$$

Développons le second membre à la manière du binome, en faisant, pour abréger,

$$X = Ax\sqrt{-1} + m\left(B\sqrt{-1} - \frac{A^2}{2}\right)x^2 + \text{etc.},$$

et nous aurons

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = 1 + \frac{1}{m}(mX) + \frac{1-m}{2m^2}(mX)^2$$
$$+ \frac{(1-m)(1-2m)}{2.3m^3}(mX)^3 + \text{etc.},$$
$$= 1 + X + \frac{1-m}{2}.X^2 + \frac{(1-m)(1-2m)}{2.3.}X^3 + \text{etc.}$$

Comme le second membre de cette identité doit être, ainsi que le premier, indépendant du nombre m, il s'ensuit que tous les termes du second membre, multipliés par une même puissance de m, doivent s'entredétruire, et qu'ainsi on ne doit tenir compte que de ceux de ces termes qui ne sont pas multipliés par m. On aura donc simplement

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = 1 + Ax\sqrt{-1} + \tfrac{1}{2}(Ax\sqrt{-1})^2$$
$$+ \frac{1}{2.3}(Ax.\sqrt{-1})^3 + \text{etc.}$$

En effectuant les puissances de $\sqrt{-1}$, et égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires, on aura

$$\sin x = (Ax) - \frac{(Ax)^3}{2.3} + \frac{(Ax)^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.},$$

$$\cos x = 1 - \frac{(Ax)^2}{2} + \frac{(Ax)^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

Il reste à déterminer A qui entre dans les deux séries. Or, Ax étant un multiple de l'arc x, pour lequel sin x et cos x conservent les mêmes valeurs numériques et les mêmes signes, si nx est la demi-circonférence, on sait que les arcs.... $1x$, $(2n+1)x$, $(4n+1)x$, etc., ont le même sinus et le même cosinus, quant à la valeur numérique et au signe; on pourra donc faire $A = 1$, $= 2n+1$, $= 4n+1$, etc., et il est naturel de s'arrêter à la première dénomination qui est la plus simple. (Note sur le chap. IV).

On a donc

$$(B)\ldots\ \sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \text{etc.},$$

$$(C)\ldots\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \text{etc.}$$

et conséquemment

$$\sin i = i - \frac{i^3}{2.3} + \text{etc.},$$

$$\cos i = 1 - \frac{i^2}{2} + \text{etc.}$$

Ces développemens de sin i et de cos i substitués dans

$$\sin(x+i) = \sin x \cos i + \cos x \sin i,$$
$$\cos(x+i) = \cos x \cos i - \sin x \sin i,$$

donnent, en s'arrêtant à la première puissance de i

$$\sin(x+i) = \sin x + i \cos x + \text{etc.},$$
$$\cos(x+i) = \cos x - i \sin x + \text{etc.}$$

On déduit de là

$$\frac{\mathrm{d}\,(\sin x)}{\mathrm{d}x} = \cos x\,,\quad \frac{\mathrm{d}\,(\cos x)}{\mathrm{d}x} = -\sin x\,,$$

et ces différentielles successives du sinus et du cosinus

$\mathrm{d}\,(\sin x) = \cos x.\mathrm{d}x$	$\mathrm{d}\,(\cos x) = -\sin x\,\mathrm{d}x$
$\mathrm{d}^2\,(\sin x) = -\sin x\,\mathrm{d}x^2$	$\mathrm{d}^2\,(\cos x) = -\cos x\,\mathrm{d}x^2$
$\mathrm{d}^3\,(\sin x) = -\cos x\,\mathrm{d}x^3$	$\mathrm{d}^3\,(\cos x) = \sin x\,\mathrm{d}x^3$
$\mathrm{d}^4\,(\sin x) = \sin x\,\mathrm{d}x^4$	$\mathrm{d}^4\,(\cos x) = \cos x\,\mathrm{d}x^4$
$\mathrm{d}^5\,(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x^5$	$\mathrm{d}^5\,(\cos x) = -\sin x\,\mathrm{d}x^5$
etc.	etc.

Ainsi, 1°. *la différentielle première du sinus d'un arc, est égale au cosinus multiplié par la différentielle de l'arc ;* 2°. *la différentielle première du cosinus d'un arc, est égale à moins le sinus par la différentielle de l'arc.*

En différentiant les séries (*B*) et (*C*) on trouve

$$\mathrm{d}\,(\sin x) = \mathrm{d}x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2\ldots6} + \text{etc.}\right),$$

$$\mathrm{d}\,(\cos x) = -\mathrm{d}x\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}\right).$$

Or le coefficient de $\mathrm{d}x$ dans la première différentielle, est la série de $\cos x$, et le coefficient de $\mathrm{d}x$ dans la seconde, est la série de $\sin x$, d'où on conclut encore

$$\mathrm{d}\,(\sin x) = \cos x\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}\,(\cos x) = -\sin x.\mathrm{d}x.$$

On a toujours, pour un rayon égal à l'unité

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}\,;$$

donc, d'après la règle de la différentiation des fractions,

$$\mathrm{d}\,(\operatorname{tang} x) = \frac{\cos x.\cos x\mathrm{d}x + \sin x.\sin x\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}.$$

La cotangente d'un angle, étant la tangente de l'angle complémentaire, on posera

$$\text{cotang}\, x = \text{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

π étant la demi-circonférence ; conséquemment

$$\text{d}(\text{cotang}\, x) = \text{d}\left(\left(\text{tang}\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -\frac{\text{d}x}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\frac{\text{d}x}{\sin^2 x},$$

en observant qu'ici la différentielle de l'arc $\frac{\pi}{2} - x$ est $-\text{d}x$, parce que $\frac{\pi}{2}$ est une constante.

Ainsi 1°. la *différentielle première de la tangente d'un arc, est égale à la différentielle de l'arc, divisée par le carré du cosinus ;* 2°. *la différentielle première de la cotangente d'un arc, est égale à celle de l'arc, prise en signe contraire, divisée par le carré du sinus.*

On a

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

et de là

$$\text{d}(\sec x) = \frac{\sin x . \text{d}x}{\cos^2 x} = \frac{\text{tang}\, x . \text{d}x}{\cos x} = \text{tang}\, x . \sec x . \text{d}x ;$$

et parce que

$$\text{cosec}\, x = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

on a

$$\text{d}(\text{cosec}\, x) = \text{d}\left(\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -\frac{\cos . x . \text{d}x}{\sin^2 x} = -\frac{\cot x . \text{d}x}{\sin x}$$

$$= -\cot x \,\text{cosec}\, x . \text{d}x.$$

Ces dernières règles étant d'une énonciation un peu longue, nous nous dispenserons de les traduire en langage ordinaire.

Il nous reste à considérer et à différentier les arcs donnés par l'une quelconque des lignes trigonométriques. Ainsi, par exemple, un arc peut être défini par son sinus, par son cosinus, sa tangente, etc.; mais avant tout, nous ferons quelques distinctions nécessaires. A un arc donné correspond un seul sinus, un seul cosinus, etc.; mais à un sinus donné, par exemple, correspondent des arcs en nombre indéfini; savoir : l'arc, la demi-circonférence moins l'arc, la circonférence plus l'arc, etc. En général, la donnée de l'une quelconque des lignes trigonométriques ne caractérise pas un arc, c'est-à-dire, qu'il existe une infinité d'arcs définis de la même manière.

Ces notions posées, nous dénoterons l'arc donné par son sinus, de cette manière : arc $(\sin = x)$, ce qui se lit ainsi : *arc dont le sinus est* x. Soit donc

$$y = fx = \text{arc}\,(\sin = x),$$

on déduit de là réciproquement

$$x = \sin y :$$

en différentiant, on a

$$dx = \cos y . dy, \quad \text{d'où } dy = \frac{dx}{\cos y};$$

or, $\cos y$, ou le cosinus d'un arc qui a x pour sinus, est $\sqrt{1 - xx}$; donc

$$dy \text{ ou } d\Big(\text{arc}\,(\sin = x)\Big) = \frac{dx}{\sqrt{1 - xx}}.$$

La somme de l'arc dont le sinus est x, et de l'arc dont le cosinus est x, est un quart de circonférence; désignant donc le premier par y et le second par z, on aura

$$y + z = \frac{\pi}{2},$$

et en différentiant

$$dz = - dy,$$

et de là

$$d\left(\text{arc}\ (\cos = x)\right) = - \frac{dx}{\sqrt{1 - xx}}.$$

Ainsi 1°. *la différentielle de l'arc donné par le sinus, est la différentielle du sinus, divisée par la racine carrée du carré du rayon moins le carré du sinus; 2°. la différentielle de l'arc donné par son cosinus, est la différentielle du cosinus prise en signe contraire, divisée par le carré du rayon moins le carré du cosinus.*

Soit

$$y = \text{arc}\ (\text{tang} = x)$$

d'où résulte

$$x = \text{tang}\ y:$$

la différentiation donne

$$dx = \frac{dy}{\cos^2 y}, \quad \text{d'où} \quad dy = \cos^2 y . dx;$$

or, $\cos y$, ou le cosinus d'un arc dont la tang $= x$, est $\frac{1}{\sqrt{1 + xx}}$; donc

$$d\left(\text{arc}\ (\text{tang} = x)\right) = \frac{dx}{1 + xx}.$$

Mais l'arc dont la cotangente $= x$, ajouté à celui dont la tangente $= x$, donne $\frac{\pi}{2}$, en sorte que, désignant toujours le premier par y, et le second par z, on a, par la différentiation

$$dz \quad \text{ou} \quad d\left(\text{arc}\ (\cot = x)\right) = - \frac{dx}{1 + xx}.$$

Donc 1°. *la différentielle de l'arc donné par sa tangente,*

est égale à celle de la tangente divisée par le carré du rayon, plus le carré de la tangente; 2°. la différentielle de l'arc donné par sa cotangente, est celle de la cotangente prise en signe contraire, divisée par le carré du rayon plus le carré de la cotangente.

On a en même tems,

$$y = \text{arc}\ (\sec = x),\quad x = \sec y;$$

donc

$$dx = \frac{\sin y dy}{\cos^2 y} = \frac{\text{tang}\ y . dy}{\cos y}.$$

Or,

$$\cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{x};\quad \text{tang}\ y = \sqrt{xx - 1},$$

donc

$$dy = d\Big(\text{arc}\ (\sec = x)\Big) = \frac{dx}{x\sqrt{xx - 1}},$$

et

$$dz = d\Big(\text{arc}\ (\text{cosec} = x)\Big) = -\frac{dx}{x\sqrt{xx - 1}};$$

On pourra maintenant s'exercer à appliquer toutes les règles précédemment données, à la différentiation de cette fonction mêlée de quantités algébriques et transcendantes

$$y = \frac{x . a^{\frac{1}{x}}}{\log \sqrt{1 - xx}} + \frac{\sin x . \cos x}{\sec^2 x} + \frac{\cos\sqrt{1 - xx}}{\text{tang}\left(\frac{ax - xx}{\sqrt{b^2 - x^2}}\right)}$$

$$+ \text{arc}\Big(\text{tang} = (1 - \sqrt{1 - xx})\Big);$$

ce qu'on fera plus commodément, si l'on représente d'abord chacun des facteurs par une lettre; qu'après la première différentiation, on exécute à part et successivement toutes les différentiations indiquées; et qu'enfin, dans le premier résultat, on énonce tout au moyen de la variable x.

Nous allons rechercher, par un autre procédé, les développemens et les différentielles des fonctions transcendantes. Nous commencerons toujours par l'exponentielle a^x.

Soit $a^x = fx$, on aura aussi $a^y = fy$, et conséquemment $a^{x+y} = f(x+y)$, en sorte qu'on a cette propriété caractéristique

$$fx \times fy = f(x+y),$$

si l'on considère sous le signe f, la variable x comme l'accroissement de y, et qu'on développe, dans cette hypothèse $f(y+x)$, on aura cette identité

$$fx \times fy = fy + x\frac{\mathrm{d}(fy)}{\mathrm{d}y} + \frac{x^2}{1.2}\frac{\mathrm{d}^2(fy)}{\mathrm{d}y^2} + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{\mathrm{d}^3(fy)}{\mathrm{d}y^3} + \text{etc.},$$

et après avoir divisé de part et d'autre par fy, il viendra

$$fx = 1 + x.\frac{\mathrm{d}(fy)}{\mathrm{d}y}.\frac{1}{fy} + \frac{x^2}{1.2}\frac{\mathrm{d}^2(fy)}{\mathrm{d}y^2}.\frac{1}{fy} + \text{etc...} \quad (1).$$

Or, les variables x et y étant indépendantes, le développement de fx ne doit pas renfermer y. Ainsi les coefficiens $\frac{\mathrm{d}(fy)}{\mathrm{d}y}.\frac{1}{fy}$, $\frac{\mathrm{d}^2(fy)}{\mathrm{d}y^2}.\frac{1}{fy}$, etc., doivent être constans : on aura donc d'abord

$$\frac{\mathrm{d}(fy)}{\mathrm{d}y}.\frac{1}{fy} = A, \quad \text{d'où } \frac{\mathrm{d}(fy)}{\mathrm{d}y} = A a^y$$

on tire de là

$$\frac{\mathrm{d}^2(fy)}{\mathrm{d}y^2} = A^2 a^y, \quad \text{d'où } \frac{\mathrm{d}^2(fy)}{\mathrm{d}y^2}.\frac{1}{fy} = A^2$$

$$\frac{\mathrm{d}^3(fy)}{\mathrm{d}y^3} = A^3 a^y, \quad \text{d'où } \frac{\mathrm{d}^3(fy)}{\mathrm{d}y^3}.\frac{1}{fy} = A^3$$

etc.

La substitution de ces valeurs dans (1), donne ce développement déja trouvé d'une autre manière,

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

On aura donc

$$\mathrm{d}(a^y) = Aa^y\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}^2(a^y) = A^2a^y\mathrm{d}y^2,\quad \mathrm{d}^3(a^y) = A^3a^y\mathrm{d}y^3,\ \text{etc.},$$

d'où on déduira, comme plus haut (pag. 34 et 35),

$\mathrm{d}\ (a^x) = \ la\ \ a^x\ \mathrm{d}x$	$\mathrm{d}\ (e^x) = e^x\ \mathrm{d}x$
$\mathrm{d}^2\ (a^x) = (la)^2\ a^x\ \mathrm{d}x^2$	$\mathrm{d}^2\ (e^x) = e^x\ \mathrm{d}x^2$
etc.	etc.

Soit, en second lieu, $\log(1+x) = f(1+x)$, on aura $\log y = fy$, et conséquemment $\log(y+xy) = f(y+xy)$. Ainsi la propriété caractéristique de la fonction que nous considérons, sera

$$f(1+x) + fy = f(y+xy):$$

développant le second membre par rapport aux puissances de xy, c'est-à-dire, en considérant y comme la variable et xy comme l'accroissement, on trouvera

$$f(1+x) + fy = fy + xy\frac{\mathrm{d}(fy)}{\mathrm{d}y} + \frac{x^2y^2}{1.2}\frac{\mathrm{d}^2(fy)}{\mathrm{d}y^2} + \text{etc.};$$

en observant que $\frac{\mathrm{d}(fy)}{\mathrm{d}y}$, $\frac{\mathrm{d}^2(fy)}{\mathrm{d}y^2}$, etc., indiquent les coefficiens des différentielles de $f(y+xy)$ par rapport à la seule variable y dont xy est l'accroissement : retranchant fy de part et d'autre, on a ce développement de $f(1+x)$,

$$f(1+x) = xy\frac{\mathrm{d}(fy)}{\mathrm{d}y} + \frac{x^2y^2}{1.2}\frac{\mathrm{d}^2(fy)}{\mathrm{d}y^2} + \text{etc.}$$

Les coefficiens $y\frac{d(fy)}{dy}$, $y^2\frac{d^2(fy)}{dy^2}$, etc., doivent encore être constans ; on posera donc d'abord

$$y.\frac{d(fy)}{dy} = M, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d(fy)}{dy} = \frac{M}{y},$$

on tire de là, d'après la règle pour différencier une fraction,

$$\frac{d^2(fy)}{dy^2} = -\frac{M}{y^2}, \text{ d'où } y^2.\frac{d^2(fy)}{dy^2} = -M,$$

$$\frac{d^3(fy)}{dy^3} = \frac{2M}{y^3}, \text{ d'où } y^3.\frac{d^3(fy)}{dy^3} = 2M,$$

$$\frac{d^4(fy)}{dy^4} = -\frac{2.3.M}{y^4}, \text{ d'où } y^4.\frac{d^4(fy)}{dy^4} = -2.3.M;$$

etc.

et conséquemment

$$f(1+x) = \log(1+x) = M\left\{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}\right\}$$

série connue, et dans laquelle le *module* M, qui reste indéterminé, dépend de la base a du système de logarithmes. On a donc $d(\log y) = \frac{Mdy}{y}$; mais en désignant a^x par y, on vient de trouver $dy = Ay\, d(\log y)$, d'où $d(\log y) = \frac{dy}{Ay}$; on a donc cette détermination $M = \frac{1}{A} = \frac{1}{la}$, laquelle, substituée dans les résultats précédens, donne ceux-ci rapportés à la base a,

$$d(\log y) = \frac{dy}{la.y}, \quad d^2(\log y) = -\frac{dy^2}{la.y^2} \text{ etc.}$$

et

$$d(ly) = \frac{dy}{y}, \quad d^2(ly) = -\frac{dy^2}{y^2}$$

pour la base e des *logarithmes népériens*.

Soit, en troisième lieu, $(1+x)^m = f(1+x)$; on aura $y^m = fy$, $(y+xy)^m = f(y+xy)$: la propriété caractéristique de cette fonction, sera donc

$$f(1+x) \times fy = f(y+xy).$$

Développant le second membre par rapport aux puissances de xy, puis divisant par fy, il viendra

$$f(1+x) = 1 + xy\frac{d(fy)}{dy}.\frac{1}{fy} + \frac{x^2y^2}{1.2}.\frac{d^2(fy)}{dy^2}.\frac{1}{fy} + \frac{x^3y^3}{1.2.3}\frac{d^3(fy)}{dy^3}\frac{1}{fy} \text{ etc.}$$

Les coefficiens $y\frac{d(fy)}{dy}.\frac{1}{fy}$, $y^2\frac{d^2(fy)}{dy^2}.\frac{1}{fy}$ etc., seront donc encore constans; ainsi on pourra poser

$$y.\frac{d(fy)}{dy}.\frac{1}{fy} = c, \quad \text{d'où } \frac{d(fy)}{dy} = cy^{m-1} = my^{m-1},$$

en supposant qu'on ait démontré, dans tous les cas de l'exposant m, que le coefficient du second terme dans le développement de $(1+x)^m$, est égal à l'indice de la puissance. (*Voyez* note 1re.)

Ainsi

$$\frac{d^2(fy)}{dy^2} = m(m-1)y^{m-2},$$

d'où

$$y^2.\frac{d^2(fy)}{dy^2}.\frac{1}{fy} = m(m-1);$$

de même

$$\frac{d^3(fy)}{dy^3} = m(m-1)(m-2)y^{m-3},$$

d'où

$$y^3.\frac{d^3(fy)}{dy^3}.\frac{1}{fy} = m(m-1)(m-2).$$

etc.

Ces substitutions faites dans le développement de $f(1+x)$, donnent la formule connue du binome.

Soit $\cos x = fx$, on aura aussi $\cos y = fy$, ... $\cos(y+x) = f(y+x)$, $\cos(y-x) = f(y-x)$, et cette propriété

$$2fx \times fy = f(y+x) + f(y-x).$$

Si on développe le second membre suivant les puissances de x, et que l'on divise ensuite de part et d'autre par $2fy$, on aura

$$fx = 1 + \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2(fy)}{dy^2}.\frac{1}{fy} + \frac{x^4}{1.2.3.4}\frac{d^4(fy)}{dy^4}.\frac{1}{fy} + \text{etc.}$$

Les coefficiens $\frac{d^2(fy)}{dy^2}.\frac{1}{fy}$, $\frac{d^4(fy)}{dy^4}.\frac{1}{fy}$, etc., étant toujours constans, si on observe que le cosinus doit être moindre que le rayon, on posera

$$\frac{d^2(fy)}{dy^2}.\frac{1}{fy} = -A^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2(fy)}{dy^2} = -A^2 \cos y;$$

on aura ensuite

$$\frac{d^4(fy)}{dy^4} = +A^4 \cos y; \quad \text{d'où} \quad \frac{d^4(fy)}{dy^4}.\frac{1}{fy} = +A^4,$$

$$\frac{d^6(fy)}{dy^6} = -A^6 \cos y; \quad \text{d'où} \quad \frac{d^6(fy)}{dy^6}.\frac{1}{fy} = -A^6.$$

Ainsi

$$\cos x = 1 - \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^4x^4}{1.2.3.4} - \frac{A^6x^6}{1.....6} + \text{etc.}$$

développement où A est un nombre encore indéterminé.

Soient $\sin x = \phi x$, $\cos y = fy$, on aura $\sin(y+x) = \varphi(y+x)$, $\sin(y-x) = \varphi(y-x)$, et cette propriété

$$2\phi x . fy = \varphi(y+x) - \varphi(y-x):$$

développant le second membre par rapport aux puissances de x, et divisant par $2fy$, il viendra

$$\varphi x = x.\frac{d(\varphi y)}{dy}.\frac{1}{fy} + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^3(\varphi y)}{dy^3}.\frac{1}{fy} + \frac{x^5}{1\ldots5}\frac{d^5(\varphi y)}{dy^5}\frac{1}{fy}, + \text{etc.}$$

les coefficiens $\frac{d(\varphi y)}{dy}.\frac{1}{fy}$, $\frac{d^3(\varphi y)}{dy^3}.\frac{1}{fy}$, etc., devant être constans, on pourra supposer

$$\frac{d(\varphi y)}{dy}.\frac{1}{fy} = b, \quad \text{d'où } \frac{d(\varphi y)}{dy} = b\cos y;$$

d'où l'on déduira, d'après ce qui a été trouvé ci-dessus,

$$\frac{d^3(\varphi y)}{dy^3} = -bA^2\cos y, \quad \text{d'où } \frac{d^3(\varphi y)}{dy^3}.\frac{1}{fy} = -bA^2;$$

$$\frac{d^5(\varphi y)}{dy^3} = +bA^4\cos y, \quad \text{d'où } \frac{d^5(\varphi y)}{dy^5}.\frac{1}{fy} = +b\,A;$$

donc

$$\sin x = bx - bA^2\frac{x^3}{1.2.3} + bA^4.\frac{x^5}{1.2.3.4.5} \text{ etc.}$$

Or, l'arc x étant n fois dans la demi-circonférence, tous les multiples de l'arc x, savoir : x, $(2n-1)x$, $(2n+1)x$, $(4n-1)x$, etc., ont le même cosinus en nombre et en signe; on peut donc, dans la série du cosinus, supposer $A=1$, cequi donne

$$\text{cosin } x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \text{ etc.}$$

et

$$\sin x = bx - \frac{bx^3}{1.2.3} + b\frac{x^5}{1.2.3.4.5}.$$

Mais de la relation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, on déduit $b = 1$;

détermination qu'on reportera dans la série du sinus. On a donc trouvé

$$d(\sin y) = \cos y . dy,\ d^3(\sin y) = -\cos y\, dy^3, \text{ etc.}$$
$$d^2(\cos y) = -\cos y\, dy^2,\ d^4(\cos y) = \cos y . dy^4, \text{ etc.}$$

Or, pour avoir les différentielles successives tant du sinus que du cosinus, il faut encore connaître la différentielle première de $\cos y$. A cet effet, on partira de la relation

$$\cos y = (1 - \sin^2 y)^{\frac{1}{2}} = z^{\frac{1}{2}}$$

en posant $1 - \sin^2 y = z$: on déduit de là (pag. 27)

$$d(\cos y) = \tfrac{1}{2}\frac{dz}{\sqrt{z}} = \tfrac{1}{2} \times \frac{-2\sin y . \cos y . dy}{\cos y} = -\sin y\, dy.$$

On peut encore observer que la différentielle de la série du cosinus, donne pour coefficient du dx, la série du sinus, dont tous les signes sont changés ; propriété de laquelle on conclut encore $d(\cos y) = -\sin y\, dy$.

CHAPITRE V.

Différentiation des fonctions, telles que ..... f(p, q, r...), p, q, r, etc., *étant des fonctions quelconques de la seule variable* x.

SUPPOSONS qu'on n'ait sous le signe f qu'une seule fonction, c'est-à-dire, que

$$y = fp.$$

D'après la définition, la différentielle première de fp, sera le terme de première puissance de l'accroissement de x dans le développement de fp, après avoir remplacé x par $x + dx$. Or, par ce changement de x en $x + dx$, p, sous le signe f, devient, comme on le sait,

$$p + p'dx + p''\frac{dx^2}{1.2} + \text{etc.},$$

où p' est le dp sur dx, c'est-à-dire, $\frac{dp}{dx}$, p'' est le d^2p sur dx^2, c'est-à-dire, $\frac{d^2p}{dx^2}$, etc., en observant qu'ici p est la *variable dépendante*, et x la *variable principale*. Que l'on désigne maintenant $p'dx + p''\frac{dx^2}{1.2} +$ etc., par h : h sera l'accroissement que reçoit p, lorsque x, dans p, reçoit l'accroissement dx : ainsi, la fonction proposée devient $f(p + h)$, et on a, d'après le théorème de *Taylor*,

$$f(p+h) = fp + \frac{dy}{dp}h + \frac{d^2y}{dp^2}\cdot\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$= fp + \frac{d(fp)}{dp}h + \frac{d^2(fp)}{dp^2}\cdot\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Nous avons écrit dy ou $d(fp)$ sur dp, $d^2(fp)$ sur dp^2 etc.,

parce que p devient ici la variable principale d'où dépend y ou fp. Si on remplace h par le développement que cette lettre représente, on aura

$$f(p+h)=fp+\frac{\mathrm{d}(fp)}{\mathrm{d}p}\left\{p'\mathrm{d}x+p''\frac{\mathrm{d}x^2}{1.2}+\text{etc.}\right\}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2(fp)}{\mathrm{d}p^2}\left\{p'\mathrm{d}x+p''\frac{\mathrm{d}x^2}{1.2}+\text{etc.}\right\}^2$$
$$+\text{etc.}$$

et en effectuant les opérations,

$$f(p+h)=fp+\frac{\mathrm{d}(fp)}{\mathrm{d}p}p'\mathrm{d}x+\left(\frac{\mathrm{d}(fp)}{\mathrm{d}p}p''+\frac{\mathrm{d}^2(fp)}{\mathrm{d}p^2}p'^2\right)\frac{\mathrm{d}x^2}{1.2}+\text{etc.},$$

en sorte que la différentielle de fp est, d'après la définition, $\frac{\mathrm{d}(fp)}{\mathrm{d}p}p'\mathrm{d}x$ ou $\frac{\mathrm{d}(fp)}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$, en remplaçant p' par $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. On a donc

$$\mathrm{d}(fp)=\frac{\mathrm{d}(fp)}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x.$$

Il faut bien se rappeler, 1°. que $\frac{\mathrm{d}(fp)}{\mathrm{d}p}$ est le coefficient de la différentielle de fp, prise par rapport à p, c'est-à-dire, en regardant p comme variable principale; 2°. que $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ est celui de la différentielle de p, prise par rapport à x, ou en regardant x comme variable principale.

Pour mieux fixer les idées, nous différentierons

$$y=fp=p^m,$$

p étant l'infinitinome $a+bx+cx^2+ex^3+\text{etc.}$ Le coefficient $\frac{\mathrm{d}(fp)}{\mathrm{d}p}$ est mp^{m-1}; $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(a+bx+cx^2+\text{etc.})}{\mathrm{d}x}$ $=b+2cx+3ex^2+\text{etc.}$; donc

$$\mathrm{d}\{a+bx+cx^2+ex^3+\text{etc.}\}^m=m(a+bx+cx^2+\text{etc.})^{m-1}$$
$$(b+2cx+3ex^2+\text{etc.})\,\mathrm{d}x.$$

et l'on voit que *pour différentier un infinitinome élevé à une puissance, il faut encore écrire l'exposant en coefficient, diminuer l'exposant d'une unité, et multiplier par la différentielle de la quantité sous l'exposant.*

On a donc cette règle *pour différentier une fonction de* p, p *étant une fonction quelconque de* x. *Faites le produit du coefficient différentiel de la différentielle de* fp, *par rapport à* p, *par celui de la différentielle de* p, *par rapport à* x, *et par* dx.

L'application de cette règle, donne

$$\mathrm{d}(a^p) = la.a^p.p'.\mathrm{d}x = la.a^p.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(lp) = \frac{p'\mathrm{d}x}{p} = \frac{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x}{p}$$

$$\mathrm{d}(\sin p) = \cos p.p'.\mathrm{d}x = \cos p.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\cos p) = -\sin p.p'.\mathrm{d}x = -\sin p.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x,$$

etc.

p étant une fonction quelconque de x. Lorsque cette fonction sera donnée, on pourra tout énoncer au moyen de la variable x.

Passons à la fonction plus générale

$$y = f(p, q),$$

p et q étant des fonctions de x. Il s'agit donc de substituer $x + \mathrm{d}x$ pour x, de développer la fonction variée suivant les puissances de $\mathrm{d}x$, et de retenir le terme de première puissance de cet accroissement. Or il est visible qu'on aura le même résultat, soit qu'on fasse la substitution en même tems dans les deux fonctions, soit qu'on la fasse d'abord dans l'une d'elles seulement, dans p, par exemple, et que dans le développement qui en résultera, on change partout x en $x + \mathrm{d}x$ dans q.

Ainsi, en écrivant $x+\mathrm{d}x$ pour x dans p seulement, q sera une constante, et on aura, d'après ce qui a été trouvé plus haut, ce développement

$$f(p+h) = fp + \frac{\mathrm{d}(fp)}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \left(\frac{\mathrm{d}(fp)}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2(fp)}{\mathrm{d}p^2}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)\frac{\mathrm{d}x^2}{1.2},$$

dans lequel nous n'avons mis en évidence, sous le signe f, que la quantité p, parce qu'elle est la seule qui ait été supposée variable. Maintenant, par le changement de x en $x+\mathrm{d}x$ dans q seulement, p redeviendra constante à son tour, et chacune des quantités fp, $\frac{\mathrm{d}(fp)}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}(fp)}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2}$, $\frac{\mathrm{d}^2(fp)}{\mathrm{d}p^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)^2$, etc. qui sera fonction de q, dans cette seconde hypothèse, donnera lieu à un développement dont le premier terme est toujours la fonction primitive : ainsi fp deviendra

$$f(p,q) + \frac{\mathrm{d}(fq)}{\mathrm{d}q}\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \left(\frac{\mathrm{d}(fq)}{\mathrm{d}q}\cdot\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2(fq)}{\mathrm{d}q^2}\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)\frac{\mathrm{d}x^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Si l'on considère que tous les termes donnés par le développement de $\frac{\mathrm{d}(fp)}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ doivent être multipliés par $\mathrm{d}x$, on verra que, sous la condition de ne retenir, pour former la différentielle première, que ce qui est multiplié par $\mathrm{d}x$, on n'aura à prendre que $\frac{\mathrm{d}(fp)}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x$, et qu'ainsi la différentielle de $f(p,q)$ ne se compose que de ces deux termes $\frac{\mathrm{d}(fp)}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$, $\frac{\mathrm{d}(fq)}{\mathrm{d}q}\cdot\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$, en sorte que

$$d[f(p,q)] = \frac{d(fp)}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}dx + \frac{d(fq)}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}\cdot dx,$$

où $\frac{d(fp)}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}dx$ est la différentielle de $f(p,q)$, prise en regardant la seule quantité p comme variable, et $\frac{d(fq)}{dq}\frac{dq}{dx}\cdot dx$ est celle de la même fonction, eu égard seulement à la variabilité de q.

Qu'on suppose

$$f(p, q) = p^m q^n,$$

et on aura, d'après la composition connue de la différentielle de $f(p, q)$,

$$d(p^m q^n) = mq^n . p^{m-1}\frac{dp}{dx}dx + np^m . q^{n-1}\frac{dq}{dx}dx.$$

Soient maintenant

$p = a - x$, $q = \frac{1}{b-x}$, d'où $p^m = (a-x)^m$, $q^n = \frac{1}{(b-x)^n}$,
on trouvera

$$p^{m-1} = (a-x)^{m-1}\ ;\quad \frac{dp}{dx} = -1;$$

$$q^{n-1} = \frac{1}{(b-x)^{n-1}},\quad \frac{dq}{dx} = \frac{1}{(b-x)^2};$$

et conséquemment

$$d(p^m q^n) = -m\frac{1}{(b-x)^n}(a-x)^{m-1}dx + n(a-x)^m\frac{1}{(b-x)^{n-1}}\cdot\frac{1}{(b-x)^2}dx$$
$$= \left\{\frac{-m(a-x)^{m-1}}{(b-x)^n} + \frac{n(a-x)^m}{(b-x)^{n+1}}\right\}dx.$$

C'est le résultat qu'on obtiendrait par la différentiation immédiate de $y = (a-x)^m \times \frac{1}{(b-x)^n}$.

On pourra appliquer la même formule à la différentiation de

$$y = e^{m(x+bx^2)}.\sin^n(x - bx^2),$$

ou

$$p = e^{x+bx^2}, \quad q = \sin(x - bx^2).$$

Il est maintenant facile de trouver la différentielle première de $f(p, q, r)$. Pour cela, on supposera que le développement

$$f(p+h, q+k) = f(p, q) + \left(\frac{d(fp)}{dp}\cdot\frac{dp}{dx} + \frac{d(fq)}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}\right)dx + \text{etc.}$$

soit celui d'une fonction de trois variables $f(p, q, r)$, en supposant qu'on n'ait encore fait varier x que dans p et dans q; il reste donc à faire varier x dans r, et par là le premier terme deviendra

$$f(p, q, r) + \frac{d(fr)}{dr}\cdot\frac{dr}{dx}dx + \text{etc.};$$

et on remarquera encore que du développement donné par la fonction qui multiplie dx dans $f(p+h, q+k)$ on ne doit tenir compte que du premier terme, parce qu'il sera le seul qui soit multiplié par dx, et qu'enfin les autres termes ne donneront rien qui appartienne à la différentielle cherchée; elle sera donc

$$d[f(p, q, r)] = \frac{d(fp)}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}dx + \frac{d(fq)}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}dx + \frac{d(fr)}{dr}\cdot\frac{dr}{dx}dx.$$

Ainsi, *pour différentier* f(p, q, r, etc.), p, q, r, etc. *étant des fonctions quelconques de* x, *il faut différentier successivement et séparément, par rapport à chacune des quantités* p, q, r, etc. *de la fonction, comme si toutes les autres étaient constantes; la somme de toutes ces différentielles, est la différentielle de la fonction.*

Cette règle est générale, et elle comprend toutes celles que nous avons énoncées jusqu'ici.

CHAPITRE VI.

De la Différentiation des équations entre deux variables.

LORSQU'UNE équation entre deux variables

$$F(x,y)=0,$$

est résolue par rapport à l'une de ces variables, c'est-à-dire, lorsqu'elle est sous la forme

$$y=fx,$$

on sait trouver les coefficiens différentiels de tous les ordres $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., puisqu'on sait différentier toute fonction de la seule variable x. Il s'agit maintenant d'assigner ces coefficiens, sans résoudre effectivement la proposée par rapport à y.

A cet effet, imaginons l'équation résolue par rapport à y; on aura donc

$$y=fx;$$

de sorte que, substituant fx pour y dans la proposée $F(x,y)=0$, elle deviendra

$$F(x,fx)=0=u.$$

Mais $F(x,fx)$ sera une simple fonction de x, que nous pouvons noter par ϕx, laquelle sera identiquement nulle, c'est-à-dire, égale à zéro, sans rien prononcer sur x; elle sera donc encore nulle par le changement de x en $x+i$, i étant quelconque. Par cette substitution, on a, d'après le

théorême de *Taylor*,

$$\varphi(x+i)=0=\varphi x+\frac{d(\varphi x)}{dx}i+\frac{d^2(\varphi x)}{dx^2}\frac{i^2}{1.2}+\frac{d^3(\varphi x)}{dx^3}\frac{i^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

et conséquemment, parce que l'accroissement i est quelconque,

$$\varphi x=0,\quad \frac{d(\varphi x)}{dx}=0,\quad \frac{d^2(\varphi x)}{dx^2}=0,\quad \frac{d^3(\varphi x)}{dx^3}=0,\ \text{etc.},$$

c'est-à-dire, en remplaçant φx par $F(x,y)$,

$$F(x,y)=0,\ \frac{d(F(x,y))}{dx}=0,\ \frac{d^2(F(x,y))}{dx^2}=0,\ \frac{d^3(F(x,y))}{dx^3}=0\ \text{etc.}$$

Il faut donc prendre les différentielles successives de F(x,y), *et égaler les coefficiens à zéro.*

Cette fonction $F(x,y)$ rentre dans $f(p, q)$ en faisant dans celle-ci $p = x$, $q = y$, parce que y est une fonction de x. On aura donc

$$d[F(x,y)]=\frac{d(Fx)}{dx}.\frac{dx}{dx}dx+\frac{d(Fy)}{dy}.\frac{dy}{dx}.dx;$$

et en ne retenant que le coefficient qu'il faut égaler à zéro,

$$\frac{d(Fx)}{dx}+\frac{d(Fy)}{dy}.\frac{dy}{dx}=0.$$

Or, la fonction $F(x,y)$ étant notée par u, on pourra énoncer très-simplement le résultat précédent en cette manière :

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}y'=0=u'\ \ldots\ (1)$$

où $y'=\frac{dy}{dx}$, $\frac{du}{dx}$ représente le coefficient de la différentielle de u, prise en n'ayant égard qu'à la variabilité de x en dehors de y, et $\frac{du}{dy}$ annonce celui de la différentielle de u, prise seulement par rapport à y, ou dans l'hypothèse de x

variable seulement dans y qui en est fonction, et non plus en dehors de y.

La fonction représentée par u' contient donc $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ et y' : $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$ ne renferment que x et y, et parce que y dépend de x, ces deux quantités sont des fonctions différentes de x : y' qui en dépend par la relation (1), est aussi une autre fonction de x; en sorte qu'on pourra poser

$$u' = f(x, y, y') = 0,$$

x, y, y' étant les trois fonctions de x analogues à p, q, r dans $f(p, q, r)$ du chapitre précédent. On aura donc, d'après la règle connue,

$$\frac{du'}{dx}\cdot dx + \frac{du'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}dx + \frac{du'}{dy'}\frac{dy'}{dx}dx,$$

en observant que $\frac{dp}{dx} = 1$; parce qu'ici $p = x$: mais le coefficient différentiel est nul, donc

$$\frac{du'}{dx} + \frac{du'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{du'}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dx} = 0 = \frac{du'}{dx} + \frac{du'}{dy}y' + \frac{du'}{dy'}y'',$$

$$y'' \text{ étant } = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \text{ (pag. 20, 21).}$$

Il reste maintenant à tout traduire en u qui est la fonction donnée. Or $\frac{du'}{dx}$ indique le coefficient de la différentielle de u' prise par rapport à la variable x en évidence dans $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$, et non pas par rapport à celle dont y et y' sont

fonctions On a donc cette traduction de $\frac{du'}{dx}$,

$$\frac{du'}{dx}=\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy\,dx}y',$$

où $\frac{d^2u}{dx^2}$ indique le coefficient différentiel du second ordre, provenant de deux différentiations successives de u, l'une et l'autre par rapport à la variable x en évidence, et $\frac{d^2u}{dy\,dx}$ celui qui résulte aussi de deux différentiations de u, effectuées la première par rapport à y seulement, et la seconde par rapport à x seulement.

On a de même

$$\frac{du'}{dy}=\frac{d^2u}{dx\,dy}+\frac{d^2u}{dy^2}y';$$

et conséquemment

$$\frac{du'}{dy}y'=\frac{d^2u}{dx\,dy}y'+\frac{d^2u}{dy^2}y'^2,$$

$\frac{d^2u}{dx\,dy}$ rappelant le coefficient différentiel provenant de deux différentiations successives, la première par rapport à x, la seconde par rapport à y, et $\frac{d^2u}{dy^2}$ le coefficient de la différentielle seconde de u par rapport à y fonction de x.

Enfin $\frac{du'}{dy'}$ indique le coefficient de la différentielle de u', différentielle prise seulement par rapport à y' en facteur dans le second terme de u', en observant que y' ne se trouve ni dans $\frac{du}{dx}$, ni dans $\frac{du}{dy}$: donc

$$\frac{du'}{dy'}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy'}{dy'}=\frac{du}{dy},\quad \text{d'où}\quad \frac{du'}{dy'}y''=\frac{du}{dy}y'',$$

Si l'on rassemble tous les termes que nous venons de transformer, on trouvera

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{d^2u}{dy\,dx}y' + \frac{d^2u}{dy^2}y'^2 + \frac{du}{dy}y'' = 0 = u'' \ldots (2)$$

pour développement de $\frac{d^2F(x,y)}{dx^2} = 0$, en supposant

$$\frac{d^2u}{dy\,dx} = \frac{d^2u}{dx\,dy},$$

identité qui sera démontrée plus loin.

Le premier membre de la formule (2), c'est-à-dire, u'' est une fonction de x, y, y', y'', qui donne pour coefficient différentiel

$$\frac{du''}{dx} + \frac{du''}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{du''}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dx} + \frac{du''}{dy''}\cdot\frac{dy''}{dx} = 0;$$

c'est-à-dire,

$$\frac{du''}{dx} + \frac{du''}{dy}y' + \frac{du''}{dy'}y'' + \frac{du''}{dy''}y''' = 0,$$

à cause de $y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$. Or en énonçant tout au moyen de u, on a ces traductions.

$$\frac{du''}{dx} = \frac{d^3u}{dx^3} + 2\frac{d^3u}{dy\,dx^2}y' + \frac{d^3u}{dy^2dx}y'^2 + \frac{d^2u}{dy\,dx}y''$$

$$\frac{du''}{dy}y' = \frac{d^3u}{dx^2dy}y' + 2\frac{d^3u}{dy\,dx\,dy}y'^2 + \frac{d^3u}{dy^3}y'^3 + \frac{d^2u}{dy^2}y'y''$$

$$\frac{du''}{dy'}y'' = 2\frac{d^2u}{dy\,dx}y'' + 2\frac{d^2u}{dy^2}y'y''$$

$$\frac{du''}{dy''}y''' = \frac{du}{dy}y''',$$

Rassemblant tous ces termes, il vient

$$\frac{d^3u}{dx^3}+3\frac{d^3u}{dx^2dy}y' +3\frac{d^3u}{dxdy^2}y'^2+\frac{d^3u}{dy^3}y'^3+3\frac{d^2u}{dx\,dy}.y''$$

$$+3\frac{d^2u}{dy^2}y'y''+ \frac{du}{dy}y'''=o=u''' \ldots\ldots (3)$$

en supposant les identités

$$\frac{d^3u}{dy\,dx^2}=\frac{d^3u}{dx^2dy}=\frac{d^3u}{dy\,dx\,dy},$$

qui seront démontrées par la suite.

On composerait aisément l'équation de relation entre y', y'', y''', y^{IV}, et ainsi des autres.

Nous observerons à l'égard de ces coefficiens différentiels, 1° que celui de l'ordre le plus élevé dans les équations (1), (2), (3), etc., est toujours linéaire, ou du premier degré; et qu'ainsi il sera toujours exprimé rationnellement en x, y, et en coefficiens différentiels des ordres inférieurs; 2°. que ce coefficient de l'ordre le plus élevé peut toujours être évalué en fonction des seules variables x et y. On voit donc que l'avantage de cette analyse consiste en ce que, sans résoudre l'équation proposée, on peut cependant en tirer tous les coefficiens différentiels.

S'il pouvait rester quelqu'obscurité sur le principe de cette théorie, parce que l'équation $\varphi x = o$ (pag. 59), n'est, dans le fait, que $o = o$, on pourrait l'établir comme il suit : soit toujours

$$u = F(x, y) = o,$$

et supposons qu'on ne fasse varier que la variable x en dehors de y, en sorte que la fonction de x, représentée par y, soit constante : on aura le développement

$$u + \frac{du}{dx} i + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{i^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3} \frac{i^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Mais x devenant $x + i$ dans y, et ne variant plus en dehors de cette fonction, si l'on désigne par h l'accroissement de y correspondant à l'accroissement i de x, le premier terme u, du développement précédent, deviendra

$$u + \frac{du}{dy} h + \frac{d^2u}{dy^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} \ldots. \quad (1)$$

$\frac{du}{dx}$ deviendra

$$\frac{du}{dx} + \frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy} h + \frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} \ldots. \quad (2)$$

$\frac{d^2u}{dx^2}$ deviendra

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)}{dy} h + \frac{d^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)}{dy^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} \ldots. \quad (3)$$

et ainsi des autres. Mais à cause de y fonction de x, on sait que

$$h = \frac{dy}{dx} i + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{i^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Substituant cette valeur pour h dans les développemens (1), (2) multiplié par i (3), multiplié par $\frac{i^2}{1.2}$, etc., on trouvera

$$F(x+i, y+h) = u + \left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}\right) i$$

$$+ \left(\frac{d^2u}{dx^2} + 2 \frac{d^2u}{dx\,dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d^2u}{dy^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{du}{dy} \frac{d^2y}{dx^2}\right) \frac{i^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Mais parce que $F(x + i, y + h) = 0$ en même tems que

$F(x, y)$, et que l'accroissement i est quelconque, les coefficiens des puissances de i deviennent séparément nuls : on a donc

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot y' = 0 = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2 \cdot \frac{d^2u}{dx\,dy} y' + \frac{d^2u}{dy^2} \cdot y'^2 + \frac{du}{dy} y'' = 0 = \frac{d^2u}{dx^2}.$$

En poussant plus loin le calcul, on trouverait le résultat (3) (pag. 64) pour coefficient de $\frac{i^3}{1.2.3}$, et ainsi des autres.

Cette manière de présenter la chose, ne laisse, ce me semble, aucune difficulté; et d'ailleurs il suffisait de déduire de $u = 0$, la conséquence $\frac{du}{dx} = 0$, et la règle pour former ce $\frac{du}{dx}$, parce que le reste se fait comme on l'a vu (pag. 61 et suiv.).

Appliquons ces règles à l'équation

$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0,$$

en différentiant une première fois, on trouve

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} - 2mx \frac{dy}{dx} - 2my + 2x = 0,$$

c'est-à-dire,

$$(y - mx) y' - my + x = 0 \ldots . (1),$$

en faisant $\frac{dy}{dx} = y'$: on déduit de là

$$y' = \frac{my - x}{y - mx} \ldots . (2)$$

Si on élimine y entre la proposée et sa dérivée en y', on obtient, après les réductions,

$$y'^2 - 2\,mxy' + \frac{x^2 - m^2x^2 - a^2m^2}{x^2 - a^2 - m^2x^2} = 0,$$

équations du second degré en y', et qui donne les deux valeurs de y' correspondantes aux deux valeurs de y.

Une seconde différentiation de l'équation (1), donne

$$(y - mx)\frac{dy'}{dx} + y'^2 - my' - my' + 1 = 0,$$

c'est-à-dire,

$$(y - mx)\,y'' + y'^2 - 2my' + 1 = 0\ldots.(3).$$

Si, dans cette équation, on substitue pour y' sa valeur tirée de (2), on aura y'' en fonction des variables x, y, et éliminant y entre cette dernière et la proposée, on obtiendra deux valeurs de y'', correspondantes aux deux valeurs de y et de y'.

Soit, en second lieu, l'équation

$$y^2 + 2\,xy + x^2 + a^2 = 0,$$

on en déduit celle-ci,

$$(2y + 2x)\,y' + (2y + 2x) = 0;$$

et divisant par $2y + 2x$,

$$y' + 1 = 0:$$

en résolvant la proposée par rapport à y, on trouve

$$y = -x \pm \sqrt{-a^2},$$

qui donne pour la différentiation

$$y' + 1 = 0,$$

comme ci-dessus.

Soit encore l'équation composée

$$y^2 - 2y\,(x - a)\sqrt{x - b} + (x - a)^2\,(x - b) = 0,$$

on trouve facilement

$$\frac{dy}{dx}\left\{2y-2(x-a)\sqrt{x-b}\right\}-2y\sqrt{x-b}-\frac{y(x-a)}{\sqrt{x-b}}+2(x-a)(x-b)$$
$$+(x-a)^2=0;$$

et, après les réductions,

$$y'=\sqrt{x-b}+\frac{x-a}{2\sqrt{x-b}}.$$

La proposée résolue par rapport à y, donne

$$y=(x-a)\sqrt{x-b}$$

d'où l'on déduit, comme précédemment,

$$\frac{dy}{dx} \text{ ou } y'=\sqrt{x-b}+\frac{x-a}{2\sqrt{x-b}}.$$

Nous montrerons quelques usages des équations différentielles, et d'abord nous chercherons le développement de l'infinitinome élevé à une puissance quelconque m. Soit

$$X=a+bx+cx^2+ex^3+\text{etc.},$$

on aura

$$y=X^m=(a+bx+cx^2+ex^3+\text{etc.})^m\ldots(1)$$

et, d'après ce qui a été démontré (pag. 55),

$$dy=mX^{m-1}X'dx,$$

d'où

$$y'=mX^{m-1}X'.$$

divisant cette identité par $y=X^m$, on a

$$\frac{y'}{y}=\frac{mX'}{X},\text{ d'où } y'X-myX'=0\ldots(2)$$

équation différentielle délivrée de X^m qui est la fonction inconnue. Posons

$$y = A + Bx + Cx^2 + Ex^3 + \text{etc.},$$

A, B, C, etc., étant des coefficiens indéterminés, nous aurons

$$y' \text{ ou } \frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Ex^2 + \text{etc.}$$

$$X' \text{ ou } \frac{dX}{dx} = b + 2cx + 3ex^2 + \text{etc.}$$

La substitution dans l'équation différentielle (2) donne celle-ci,

$$aB - mbA + \{2aC + bB - m(2cA + bB)\}x$$
$$+ \{3aE + 2bC + cB - m(3eA + 2cB + bC)\}x^2 + \text{etc.} = 0,$$

de laquelle on déduit

$$aB - mbA = 0$$
$$2aC + bB - m(2cA + bB) = 0$$
$$3aE + 2bC + cB - m(3eA + 2cB + bC) = 0.$$
$$\text{etc.}$$

et

$$B = \frac{mbA}{a}$$

$$C = \frac{2mcA + (m-1)bB}{2a}$$

$$E = \frac{3meA + (2m-1)cB + (m-2)bC}{3a}.$$
$$+ \text{etc.}$$

Mais le premier coefficient A reste indéterminé; pour l'évaluer, on observera qu'à $x = 0$, répondent en même tems $X = a$,

$y=A=a^m$; donc $A=a^m$, détermination qu'on portera dans B, C, E, etc.

Passons à une autre question. En posant

$$y=\sin x,\quad z=\cos x,$$

nous avons trouvé

$$dy=\cos x.dx;\ dz=-\sin x.dx.$$

Si on multiplie la première de ces équations par $\sqrt{-1}$, et qu'on l'ajoute à la seconde, on aura

$$dz+dy\sqrt{-1}=(-y+z\sqrt{-1})dx=(z+y\sqrt{-1})\sqrt{-1}.dx,$$

et divisant de part et d'autre par $z+y\sqrt{-1}$,

$$\frac{dz+dy\sqrt{-1}}{z+y\sqrt{-1}}=\sqrt{-1}.dx.$$

Or, nous avons vu (pag. 55) que si p est une fonction quelconque de x, le *logarithme népérien* de p, c'est-à-dire, lp, a pour différentielle $\frac{dp}{p}$: posant donc

$$p=z+y\sqrt{-1},$$

on aura

$$dp=dz+dy\sqrt{-1},$$

et par la division de ces deux égalités

$$\frac{dp}{p}=\frac{dz+dy\sqrt{-1}}{z+y\sqrt{-1}}.$$

Ainsi, la fonction $l(z+y\sqrt{-1})$ est celle qui a pour différentielle $\frac{dz+dy\sqrt{-1}}{z+y\sqrt{-1}}$: d'ailleurs, la fonction primitive qui a pour différentielle $dx\sqrt{-1}$, est évidemment $x\sqrt{-1}$.

Donc

$$l(z+y\sqrt{-1})=x\sqrt{-1},$$

ou plus généralement

$$l(z+y\sqrt{-1})=x\sqrt{-1}+k,$$

k étant une constante arbitraire qui complette la fonction primitive, constante qui disparaît par la différentiation, en sorte qu'on retomberait encore sur l'équation différentielle de laquelle on est parti. Mais la constante arbitraire k doit être déterminée conformément à la nature des fonctions y et x: or pour $x=0$ on a $y=0$, $z=1$, et, dans cette hypothèse,

$$l(z+y\sqrt{-1})=x\sqrt{-1}+k$$

devient

$$l1=k,\ \text{d'où}\ k=0.$$

Ainsi

$$l(z+y\sqrt{-1})=x\sqrt{-1}=x\sqrt{-1}\,.\,le=le^{x\sqrt{-1}},$$

et repassant des logarithmes aux nombres,

$$z\pm y\sqrt{-1}=e^{\pm x\sqrt{-1}},$$

à cause du double signe du radical. On est donc conduit à cette propriété

$$\cos x\pm\sin x\,.\sqrt{-1}=e^{x\sqrt{-1}}\ \ldots\ldots(3).$$

Ajoutant, puis soustrayant les deux équations comprises dans la précédente, on a d'une part

$$\left.\begin{aligned}\cos x&=\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\\ \sin x&=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(4).$$

Ainsi des sinus et des cosinus réels se trouvent exprimés par des exponentielles imaginaires, ce qu'on peut regarder, dit *Lagrange*, comme une des plus belles découvertes de ce siècle.

Si dans les deux membres de (4) on change x en $x\sqrt{-1}$, on trouve

$$\left.\begin{aligned} \cos(x\sqrt{-1}) &= \frac{e^{-x}+e^{+x}}{2} \\ \sin(x\sqrt{-1}) &= \frac{e^{-x}-e^{+x}}{2\sqrt{-1}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (4')$$

Ainsi réciproquement des sinus et cosinus d'arcs imaginaires sont exprimés par des exponentielles réelles.

Que dans la relation

$$l(\cos x + \sin x\sqrt{-1}) = x\sqrt{-1},$$

on remplace x par des multiples pairs de la demi-circonférence, savoir 0π, 2π, $4\pi \ldots 2k\pi$, et on trouvera

$$l1=0,\ l1=2\pi\sqrt{-1},\ l1=4\pi\sqrt{-1}\ldots l1=2k\pi\sqrt{-1}.$$

Ainsi l'unité et conséquemment tout nombre a un nombre indéfini de logarithmes dont un seul est réel: qu'on remplace ensuite x par les multiples impairs de la demi-circonférence, savoir π, 3π, $5\pi \ldots (2k+1)\pi$, et on aura

$$l(-1)=\pi\sqrt{-1},\ l(-1)=3\pi\sqrt{-1},$$
$$l(-1)=5\pi\sqrt{-1}\ldots\ l(-1)=(2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Ainsi tout nombre négatif ne comporte que des logarithmes imaginaires.

Si on change x en mx dans l'identité (3), ce qui donnera

$$\cos mx \pm \sin mx\sqrt{-1} = e^{\pm mx\sqrt{-1}} \ldots (5),$$

et qu'on élève les deux membres de la même identité à la puissance m, d'où

$$(\cos x \pm \sin x \sqrt{-1})^m = e^{\pm mx\sqrt{-1}} \ldots .(6),$$

des formules (5) et (6) on déduira celle-ci

$$(\cos x \pm \sin x \sqrt{-1})^m = \cos mx \pm \sin mx \sqrt{-1},$$

qui est remarquable autant par sa simplicité et son élégance que par sa fécondité et sa généralité (*Leçon Xme. du Calcul des fonctions, par Lagrange*).

Considérons maintenant une équation telle que

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{m-2} - \ldots - Tx + V = 0 = y \ldots .(1),$$

dont le premier membre soit le produit des m facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$, etc. : on a l'identité

$$x^n - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \ldots Tx + V = (x-a)(x-b)(x-c) \text{ etc.} .(2),$$

laquelle a encore lieu lorsque x prend un accroissement quelconque, ce qu'il ne serait pas vrai de dire de l'équation elle-même, qui n'a lieu que pour un nombre déterminé de valeurs de x.

Ainsi l'identité (2) subsistera encore pour $x+i$, i étant quelconque : or, si on développe chacun des membres suivant les puissances ascendantes de i, on aura des égalités entre les coefficiens des mêmes puissances de cet accroissement. Mais le coefficient de i, dans le premier membre de l'identité (2), est

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} \ldots - T;$$

et, d'après la règle pour différentier un produit, on trouve

pour celui de i dans le second développement (pag. 33 et suiv.),

$$\frac{dy}{dx} = (x-b)(x-c)(x-d) \text{ etc.} + (x-a)(x-c)(x-d) \text{ etc.}$$
$$+ (x-a)(x-b)(x-d) \text{ etc.}$$

On a donc

$$mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} \ldots - T = (x-b)(x-c)(x-d) \text{ etc.}$$
$$+ (x-a)(x-c)(x-d) \text{ etc.}$$
$$+ (x-a)(x-b)(x-d) \text{ etc.}$$
$$+ (x-a)(x-b)(x-c) \text{ etc.}$$
$$+ \text{ etc.}$$

Le polynome y devient nul pour $x = a, = b, = c$, etc., mais il n'en est plus ainsi du coefficient différentiel du premier ordre $\frac{dy}{dx}$; on en verra la raison dans les applications aux courbes. Les coefficiens différentiels du second ordre, sont

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2} - (m-1)(m-2)Ax^{m-3} \ldots\ldots$$
$$= (x-c)(x-d) \text{ etc.} + (x-a)(x-d) \text{ etc.}$$

en observant que le second membre est la somme des produits différens des m facteurs, pris $m-2$ à $m-2$. Ce coefficient ne devient nul pour aucune des racines, et il en est de même de tous les suivans.

Mais si la proposée y comporte des racines égales, et qu'on ait, par exemple, cette identité

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots\ldots - Tx + V$$
$$= (x-a)^{m'}(x-b)^{m''}(x-c)^{m'''}(x-e)(x-f),$$

on en déduira

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = Y = m'(x-a)^{m'-1}&(x-b)^{m''}(x-c)^{m'''}(x-e)(x-f)\\ +m''(x-a)^{m'}&(x-b)^{m''-1}(x-c)^{m'''}(x-e)(x-f)\\ +m'''(x-a)^{m'}&(x-b)^{m''}(x-c)^{m'''-1}(x-e)(x-f)\\ +\quad (x-a)^{m'}&(x-b)^{m''}(x-c)^{m'''}\cdot(x-f)\\ +\quad (x-a)^{m'}&(x-b)^{m''}(x-c)^{m'''}(x-e)\end{aligned}$$

et alors les polynomes y et Y sont satisfaits en même tems par toutes les racines égales, puisqu'ils prennent pour facteur ou pour diviseur commun

$$D = (x-a)^{m'-1}(x-b)^{m''-1}(x-c)^{m'''-1},$$

c'est-à-dire, le produit des facteurs multiples, élevés chacun à un exposant moindre d'une unité que celui du même facteur dans la proposée. On a vu dans l'Algèbre (1re. sect.), que des polynomes y ou X et Y, on pouvait déduire deux équations qui ne contiendraient l'une que les racines inégales, l'autre que les racines égales, mais devenues toutes inégales. Le $\frac{d^2y}{dx^2}$, divisé par 2, serait le polynome Z, qui deviendrait nul par toutes les racines égales, et ainsi des coefficiens différentiels jusqu'à celui dont l'ordre serait le plus petit des exposans m', m'', m'''.

Recherchons enfin les formules qui donnent les sommes des puissances des racines en coefficiens de l'équation.

Désignons par α, β, γ, δ, etc., les racines de l'équation

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} = 0,$$

nous aurons l'identité

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} = (x-\alpha)(x-\beta)\ \text{etc.},$$

et conséquemment celle-ci

$$l\{x^m - Ax^{m-1} + \text{etc.}\} = l(x-\alpha) + l(x-\beta) + l(x-\gamma) \text{ etc. } (*),$$

(*) De cette identité qui a lieu aussi pour $x+i$, on conclut l'égalité des coefficiens de i, c'est-à-dire, celle des coefficiens différentiels du premier ordre. Si l'on désigne par y, le polynome $x^m - Ax^{m-1} \ldots - Tx + V$, on aura

$$l(y + \frac{dy}{dx} i + \text{etc.}) = l((x-\alpha)+i) + l((x-\beta)+i) + l((x-\gamma)+i) + \text{etc.}$$

Mais en posant $M = 1$ dans le développement de $\log(1+x)$ (pag. 48), afin de passer aux logarithmes népériens, puis $x = \frac{k}{z}$, on trouvera

$$l(z+k) = lz + \frac{k}{z} - \frac{k^2}{2z^2} + \frac{k^3}{3z^3} - \text{etc.}$$

Soient maintenant $z = y$ et $k = \frac{dy}{dx} i + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{i^2}{1.2} + \text{etc.}$, puis successivement $z = x - \alpha$, $= x - \beta$, $= x - \gamma$, etc., et $k = i$, et on obtiendra cette identité

$$\begin{aligned} ly + \frac{d(ly)}{dx} i + \text{etc.} &= l(x-\alpha) + \frac{i}{x-\alpha} + \text{etc.} \\ &+ l(x-\beta) + \frac{i}{x-\beta} + \text{etc.} \\ &+ l(x-\gamma) + \frac{i}{x-\gamma} + \text{etc.} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Effaçant ly d'une part, et de l'autre son équivalent .... $l(x-\alpha) + l(x-\beta) + l(x-\gamma)$ etc., puis divisant par i, on sera conduit à

$$\frac{d(ly)}{dx} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma} + \text{etc.}$$

l indiquant un logarithme hyperbolique. On peut donc différentier de part et d'autre, et on aura (pag. 55), après la division par dx,

$$\frac{mx^{m-1}-(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}-\text{etc.}\quad -T}{x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-\ldots\ldots-Tx+V}$$

$$=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}+\text{etc.}\ \ldots\ldots\ (M)$$

Développons, par la division, les deux membres suivant les puissances négatives de x : le premier donnera un quotient de cette forme

$$\frac{P}{x}+\frac{Q}{x^2}+\frac{R}{x^3}+\frac{S}{x^4}+\text{etc.}$$

et pour trouver les valeurs de P, Q, R, S, etc., il n'y aura qu'à multiplier le quotient par le dénominateur ...... $x^m - Ax^{m-1} +$ etc., et comparer ensuite les termes avec ceux du numérateur $mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2}$: on aura ainsi

$$P = m$$
$$Q = AP - (m-1)A$$
$$R = AQ - BP + (m-2)B$$
$$S = AR - BQ + CP - (m-3)C,$$
etc.

où l'on voit que la suite des quantités P, Q, R, etc., devient,

---

c'est-à-dire,

$$\frac{mx^{m-1}-(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}\ldots-T}{x^m-Ax^{m-1}\ldots-Tx+V}=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}+\text{etc.}$$

identité donnée par la différentiation immédiate de $l(x^m \quad -Tx+V)$ $= l(x-\alpha)+$ etc.

après le m^{me}. terme, une suite récurrente, dont l'échelle de relation est A, $-B$, $+C$, $-D$, etc.

La somme des quotiens donnés par le second membre, sera

$$\frac{m}{x}+(\alpha+\beta+\gamma+\text{etc.})\frac{1}{x^2}+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.})\frac{1}{x^3}$$
$$+(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\text{etc.})\frac{1}{x^4}+\text{etc.}$$

Maintenant la comparaison des coefficiens des mêmes puissances de x, donne

$$P=m$$
$$Q=\alpha+\beta+\gamma \text{ etc.}$$
$$R=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \text{ etc.}$$
$$S=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 \text{ etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Ainsi, désignant par S_1, S_2, S_3, etc., les sommes des puissances successives entières et positives des racines, on aura, après les réductions,

$$S_1=-A$$
$$S_2=AS_1-2B$$
$$S_3=AS_2-BS_1+3C$$
$$S_4=AS_3-BS_2+CS_1-4D$$
$$\text{etc.}$$

On a donc exprimé les sommes des puissances successives entières et positives des racines d'une équation, en coefficiens de cette équation.

On peut écrire l'identité (M) comme il suit :

$$\frac{-T+2Sx-3Rx^2+4Qx^3-\text{etc.}}{V-Tx+Sx^2-Rx^3+\text{etc.}}=-\frac{1}{\alpha-x}-\frac{1}{\beta-x}-\frac{1}{\gamma-x}+\text{etc.}$$

Le développement des premiers membres, suivant les puissances croissantes, entières et positives de x, sera de la forme

$$-P'-Q'x-R'x^2-S'x^3+\text{etc.}$$

Multipliant par le dénominateur et comparant les termes, on trouvera

$$\begin{aligned} VP' &= T \\ VQ' &= TP'-2S \\ VR' &= TQ'-SP'+3R \\ VS' &= TR'-SQ'+RP'-4Q. \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Le second membre étant aussi développé suivant les puissances croissantes, entières et positives de x, donnera

$$-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\text{etc.}\right)-\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\text{etc.}\right)x$$
$$-\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\text{etc.}\right)x^2+\text{etc.};$$

on aura donc

$$\begin{aligned} P' &= \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\text{etc.} \\ Q' &= \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\text{etc.} \\ R' &= \frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

en sorte que, désignant par ${}_1S$, ${}_2S$, ${}_3S$, etc. les sommes des puissances réciproques des racines, on aura ces relations

$${}_1S = \frac{T}{V}$$

$${}_2S = \frac{T}{V}\,{}_1S - \frac{2}{V}\,S$$

$${}_3S = \frac{T}{V}\,{}_2S - \frac{S}{V}\,{}_1S + \frac{3}{V}\,R$$

$${}_4S = \frac{T}{V}\,{}_3S - \frac{S}{V}\,{}_2S + \frac{R}{V}\,{}_1S - \frac{4}{V}\,Q.$$

etc.

Ces seconds membres forment une série récurrente dont l'échelle de relation est $+\frac{T}{V}$, $-\frac{S}{V}$, $+\frac{R}{V}$, — etc.

CHAPITRE VII.

Sur la manière de rapporter les expressions et les équations différentielles à différentes variables.

DANS ce qui précède, nous avons toujours regardé x comme *variable principale ou indépendante*, et alors y variait par x, suivant la relation $y=fx$, ou $F(x,y)=0$: mais si l'on résout l'équation par rapport à x, on fait dépendre x de y qui devient *la variable principale*: c'est, dans la géométrie des courbes, construire sur l'axe des x, dans le premier cas, et sur l'axe des y, dans le second.

Ainsi, toute expression, toute équation différentielle est relative à l'une de ces hypothèses, et sa forme change en passant d'une hypothèse à une autre.

Pour traiter d'abord le cas le plus simple, nous supposerons qu'on veuille rapporter les coefficiens différentiels de l'hypothèse de x variable principale, à celle de x variable dépendante; ou, en d'autres termes, qu'on veuille traduire les coefficiens différentiels dus à $y=fx$, dans ceux qui répondraient à $x=\varphi y$.

Si dans $y=fx$ on change x en $x+i$, y prend un accroissement qui est

$$h=\frac{dy}{dx}i+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{i^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{i^3}{1.2.3}+\text{etc.}\ldots\ (1)$$

Donc, si dans l'équation réciproque $x=\varphi y$, on change y

en $y+h$, x devient $x+i$, et on a

$$i=\frac{dx}{dy}h+\frac{d^2x}{dy^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3x}{dy^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}\ldots(2)$$

Si l'on prend la valeur (1) de h pour la substituer dans (2), on aura cette identité

$$i=x'\left(y'i+y''\frac{i^2}{1.2}+y'''\frac{i^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right)$$

$$+\frac{x''}{1.2}\left(y'i+y''\frac{i^2}{1.2}+y'''\frac{i^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right)^2+\text{etc.}$$

dans laquelle y', y'', y''', etc., désignent $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, etc., et x', x'', x''', etc., représentent $\frac{dx}{dy}, \frac{d^2x}{dy^2}, \frac{d^2x}{dy^3}$, etc.

et on en déduit, par la comparaison des coefficiens des mêmes puissances de i, ces relations

$$x'y'=1,\quad x'y''+x''y'^2=0,\quad x'y'''+3x''y'y''+x'''y'^3=0\ \text{etc.},$$

d'où l'on tire, 1°.

$$y'=\frac{1}{x'},\quad y''=-\frac{x''}{x'^3},\quad y'''=\frac{3x''^2}{x'^5}-\frac{x'''}{x'^4},$$

$$y^{\text{IV}}=-\frac{15x''^3}{x'^7}+\frac{10x''x'''}{x'^6}-\frac{x^{\text{IV}}}{x'^5},\quad y^{\text{V}}=\frac{105x''^4}{x'^9}-\frac{105x''^2x'''}{x'^8}$$

$$+\frac{15x''x^{\text{IV}}+10x'''^2}{x'^7}-\frac{x^{\text{V}}}{x'^6},\ \text{etc.}$$

et 2°. ces relations inverses :

$$x'=\frac{1}{y'},\quad x''=-\frac{y''}{y'^3},\quad x'''=\frac{3y''^2}{y'^5}-\frac{y'''}{y'^4},$$

$$x^{iv} = -\frac{15y''^3}{y'^7} + \frac{10y''y'''}{y'^6} - \frac{y^{iv}}{y'^5},\quad x^{v} = \frac{105y''^4}{y'^9} - \frac{105y''^2y'''}{y'^8}$$
$$+\frac{15y''y^{iv}+10y'''^2}{y'^7} - \frac{y^{v}}{y'^6},\ \text{etc.}$$

etc.

Avant de passer à une solution plus générale de la question qui fait le sujet de ce chapitre, nous montrerons, par quelques exemples, l'utilité des transformations que nous venons de faire connaître.

En partant de $y = a^x$, dont la relation inverse est $x = \log. y$, nous avons trouvé

$$\frac{dy}{dx} \text{ ou } y' = a^x.la = y.la.$$

Or, d'après la relation

$$y'x' = 1,\ \text{d'où}\ x' = \frac{1}{y'},$$

on aura

$$x' = \frac{1}{y\,la},\ \text{d'où}\ dx = \frac{dy}{y.la},$$

telle est, en effet, la différentielle du logarithme de y.

En partant de la fonction $y = \sin x$ qui donne $x = \text{arc}(\sin = y)$, on a trouvé

$$\frac{dy}{dx} \text{ ou } y' = \cos x;$$

donc

$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\cos x},\ \text{ou}\ dx = \frac{dy}{\cos x}.$$

Or x étant l'arc qui a pour sinus y, on sait que.... $\cos x = \sqrt{1-y^2}$, et conséquemment

$$dx \text{ ou } d(\text{arc}(\sin = y)) = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

En supposant $y = \cos x$, d'où l'on déduit $x = \text{arc}\,(\cos. = y)$, on a trouvé

$$\frac{dy}{dx} \text{ ou } y' = -\sin x;$$

et de là résulte

$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{-\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

et conséquemment

$$dx \quad \text{ou} \quad d\,(\text{arc}\,(\cos = y)) = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Pour $y = \text{tang}\, x$, qui donne $x = \text{arc}\,(\text{tang} = y)$, on a eu

$$\frac{dy}{dx} \text{ ou } y' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

et d'après la relation $x'y' = 1$, on trouve

$$x' = \frac{dx}{dy} = \cos^2 x.$$

on déduit des formules (pag. 82 et 83.)

$$x'' = \frac{d^2x}{dy^2} = -2x' \sin x \cos x = -x' \sin 2x = -\sin 2x \cos^2 x$$

$$x''' = \frac{d^3x}{dy^3} = -2x'(\cos 2x \cos^2 x - \sin 2x \sin x \cos x)$$
$$= -2x' \cos 3x \cos x = -2 \cos 3x \cos^3 x$$

$$x^{\text{IV}} = \frac{d^4x}{dy^4} = 2.3x'(\sin 3x \cos^3 x + \cos 3x \sin x \cos^2 x)$$
$$= 2.3.x' \sin 4x \cos^2 x = 2.3 \sin 4x \cos^4 x$$

$$x^{\text{V}} = \frac{d^5x}{dy^5} = 2.3.4.x'(\cos 4x . \cos^4 x - \sin 4x \sin x \cos^3 x)$$
$$= 2.3.4.x' \cos 5x \cos^4 x = 2.3.4 \cos 5x \cos^5 x$$

et ainsi de suite.

Ayant ainsi formé les coefficiens différentiels x', x'', x''', etc., de x, relativement à y variable principale, on les substituera dans la série de Taylor, laquelle, rapportée à l'hypothèse $x=\varphi y$, devient

$$x+i=\varphi(y+h)=x+x'h+x''\frac{h^2}{1.2}+x'''\frac{h^3}{1.2.3}$$
$$+x^{\text{iv}}\frac{h^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

et on aura, en observant que lorsque l'arc x devient $x+i$, sa tangente devient $y+h$, et qu'ainsi $\varphi(y+h)$ représente arc (tang $=(y+h)$),

$$\text{arc}(\text{tang}=(y+h))=x+h\cos x\cos x-\frac{h^2\cos^2 x}{2}\sin 2x-\frac{h^3\cos^3 x}{3}\cos 3x$$
$$+\frac{h^4\cos^4 x}{4}\sin 4x+\frac{h^5\cos^5 x}{5}\cos 5x+\text{etc.}$$

formule remarquable par sa simplicité et sa généralité. Si on y fait $x=0$, auquel cas $y=0$, parce que $y=\text{tang}\,x$, elle deviendra

$$\text{arc}(\text{tang}=h)=h-\frac{h^3}{3}+\frac{h^5}{5}+\frac{h^7}{7}+\text{etc.}$$

formule due à *Leibnitz*, et qui sert à évaluer les arcs en parties du rayon (Algèbr., 2e. sect.).

On peut encore, par le même principe, résoudre la question suivante : étant donnée la valeur de y en x par la série

$$y=ax+bx^2+cx^3+ex^4+\text{etc.}$$

trouver celle de x en y, ce qui est le problême du retour des suites. La suite proposée revient à

$$y=fx=(y'^{\circ})x+(y''^{\circ})\frac{x^2}{1.2}+(y'''^{\circ})\frac{x^3}{1.2.3}+(y^{\text{iv}\circ})\frac{x^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

où (y'^{o}), (y''^{o}), etc., sont ce que deviennent les coefficiens différentiels y', y'', y''',... lorsqu'on fait $x=0$, auquel cas $y=0$; on aura donc réciproquement

$$x=\varphi y=(x'^{o})y+(x''^{o})\frac{y^2}{1.2}+(x'''^{o})\frac{y^3}{1.2.3}+(x^{\text{IV}o})\frac{y^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

(x'^{o}), (x''^{o})... étant ce que deviennent $x'=\frac{dx}{dy}$, ...

$x''=\frac{d^2x}{dy^2}$... etc., pour $y=0$, et conséquemment pour $x=0$. Mais à cause de

$$(y'^{o})=a,\ (y''^{o})=2b,\ (y'''^{o})=6c,\ (y^{\text{IV}o})=24e,$$
$$(y^{\text{V}o})=120f,\ \text{etc.}$$

on a d'après les formules (pag. 82 et 83), et en observant qu'à (y'^{o}), (y''^{o})... correspondent (x'^{o}), (x''^{o}), etc.,

$$(x'^{o})=\frac{1}{a},\quad (x''^{o})=-\frac{2b}{a^3},$$

$$(x'''^{o})=\frac{12b^2-6ca}{a^5},\quad (x^{\text{IV}o})=-\frac{120b^3+120abc-24a^2e}{a^7},$$

$$(x^{\text{V}o})=\frac{1680.b^4-2520ab^2c+720a^2be+360a^2c^2-120a^3f}{a^9},\ \text{etc.};$$

ces valeurs, substituées dans le développement de x suivant y, donnent

$$x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a^3}y^2+\frac{(2b^2-ca)}{a^5}y^3-\frac{(5b^3-5abc+a^2e)}{a^7}y^4$$
$$+\frac{(14b^4-21ab^2c+6a^2be+3a^2c^2-a^3f)}{a^9}y^5+\text{etc.},$$

série réciproque de la proposée.

Si, dans la série proposée, on suppose $y = m$, et qu'on change b en $-b$, e en $-e$, et ainsi de deux en deux termes, cette série se transformera dans l'équation

$$m - ax + bx^2 - cx^3 + ex^4 - fx^5 + \text{etc.} = 0,$$

qui aura pour l'une de ses racines,

$$x = \frac{m}{a} + \frac{m^2 b}{a^3} - \frac{m^3 c}{a^4} + \frac{m^4 e}{a^5} - \frac{m^5 f}{a^6} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{2m^3b^2}{a^5} - \frac{5m^4bc}{a^6} + \frac{3m^5(c^2 + 2be)}{a^7} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{5m^4b^3}{a^7} - \frac{21m^5bc}{a^8} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{14m^5b^4}{a^9} + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

racine qui, comme l'observe M. *Lagrange*, est la plus petite de toutes celles de la proposée.

Le polynome dont il faut trouver le retour, est ordinairement sous la forme plus générale

$$y^l = Ax^q + Bx^{q+r} + Cx^{q+2r} + Ex^{q+3r} + \text{etc.},$$

et plus souvent encore ce n'est pas la variable x elle-même, mais une puissance quelconque de cette variable x, telle que x^p, qu'il s'agit de développer. On peut ramener ce cas au précédent.

En effet, soit $x^r = u$, d'où $x^q = u^{\frac{q}{r}}$, et la série deviendra

$$y^l = u^{\frac{q}{r}}(A + Bu + Cu^2 + Eu^3 + \text{etc.}),$$

qu'on élève de part et d'autre à la puissance $\frac{r}{q}$, on trouvera

$$y^{\frac{lr}{q}} = u(A + Bu + Cu^2 + Eu^3 + \text{etc.})^{\frac{r}{q}};$$

et comme cette dernière puissance prend encore la forme $A' + B'u^2 + C'u^3 + E'u^4 + \text{etc.}$, on aura

$$y^{\frac{lr}{q}} = A'u + B'u^2 + C'u^3 + E'u^4 + \text{etc.};$$

et si l'on pose $y^{\frac{lr}{q}} = v$, on trouvera enfin

$$v = A'u + B'u^2 + C'u^3 + E'u^4 + \text{etc.}$$

Cette suite aura pour série de retour

$$u = a'v + b'v^2 + c'v^3 + e'v^4 + \text{etc.};$$

et si, de part et d'autre, on élève à la puissance $\frac{p}{r}$, il viendra

$$u^{\frac{p}{r}} = v^{\frac{p}{r}}(a' + b'v + c'v^2 + e'v^3 + \text{etc.})^{\frac{p}{r}},$$

c'est-à-dire,

$$u^{\frac{p}{r}} = v^{\frac{p}{r}}(\alpha + \beta v + \gamma v^2 + \epsilon v^3 + \text{etc.}).$$

Or, de $x^q = u^{\frac{q}{r}}$, on déduit $x^p = u^{\frac{p}{r}}$; d'ailleurs, $v^{\frac{p}{r}} = y^{\frac{lp}{q}}$; donc

$$x^p = \alpha y^{\frac{lp}{q}} + \beta y^{\frac{(p+r)l}{q}} + \gamma y^{\frac{(p+2r)l}{q}} + \epsilon y^{\frac{(p+3r)l}{q}} + \text{etc.}$$

suite dans laquelle les coefficiens α, β, γ, ϵ, etc., sont exprimés au moyen de A, B, C, E, etc., et de l, q, r.

Ces principes suffisent pour résoudre les questions qui con-

cernent le retour des séries. Ceux qui desireront plus de détails, pourront consulter la *Résolution numérique des Equations*, par *Lagrange*, et l'excellent ouvrage de M. *Kramp*, ayant pour titre : *Elémens d'arithmétique universelle* (chap. XXIII).

Supposons maintenant, ainsi qu'il arrive dans la mécanique, que x et y soient fonctions de t, qui sera la variable principale ou indépendante : en regardant y comme une simple fonction de x, y devient, par le changement de x en $x+i$,

$$(x+i)=y+(y')i+(y'')\frac{i^2}{1.2}+(y''')\frac{i^3}{1.2.3}+\text{etc.}\ldots(1)$$

où $(y')=\frac{dy}{dx}$, $(y'')=\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. mais x étant une fonction de t, fonction que nous représenterons par Ft, y sera pareillement une fonction de t, que nous désignerons par φt, en sorte que si i et k sont les accroissemens que prennent x' et y, lorsque t prend l'accroissement h, on aura les deux développemens

$$y+k=\varphi(t+h)=y+y'h+y''\frac{h^2}{1.2}+y'''\frac{h^3}{1.2.3}\ldots(2)$$

$$x+i=F(t+h)=x+x'h+x''\frac{h^2}{1.2}+x'''\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}\ldots(3)$$

où y', y'', y''', etc., dénotent $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$, etc., et x', x'', x''' ek, dénotent $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^3x}{dt^3}$ etc., parce qu'ici t est la variable principale.

D'après les deux relations

$$x+i=F(t+h),\ y+k=f(x+i)$$

l'accroissement k de y est dû à l'accroissement i de x, provenant de l'accroissement h de t; et d'après cette autre relation

$$y+k=\varphi\,(t+h.)$$

ce même accroissement provient de l'accroissement h de t. Donc si dans (1) on écrit pour i sa valeur $x'h+x''\frac{h^2}{1.2}$, etc., tirée de (3), le résultat sera ce que devient y, lorsque t devient $t+h$, c'est-à-dire, le développement (2). On a donc cette identité

$$y+(y')\left(x'h+x''\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}\right)+\frac{(y'')}{1.2}\left(x'h+x''\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}\right)^2+\text{etc.}$$
$$=y+y'h+y''\frac{h^2}{1.2}+\text{ etc.}$$

de laquelle on tire, par la comparaison des mêmes puissances de h, ces relations

$$x'\,(y')=y',\quad x''\,(y')+x'^2(y'')=y'',$$
$$x'''\,(y')+3\,(y'')\,x'x''+(y''')\,x'^3=y''',\ \text{etc.},$$
$$\text{etc.}$$

qui donnent

$$(y')=\frac{y'}{x'},\quad (y'')=\frac{y''-x''\,(y')}{x'^2},$$

$$(y''')=\frac{y'''-3x'x''\,(y'')-x'''\,(y')}{x'^3},\ \text{etc.}$$

Si l'on suppose que t soit y, ce qui revient à regarder y comme variable principale, alors $\frac{dy}{dt}$ ou y' devient $\frac{dy}{dy}=1$; $\frac{d^2y}{dt^2}=y''=0$, $\frac{d^3y}{dt^3}=y'''=0$, et ainsi des autres; d'ailleurs

$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy}$, $x'' = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dy^2}$, etc., et, dans ce cas,

$$(y') = \frac{1}{x'},\ (y'') = -\frac{x''}{x'^3},\ (y''') = \frac{3x''^2}{x'^5} - \frac{x'''}{x'^4},\ \text{etc.}$$

résultats trouvés plus haut, en observant que (y'), (y''), (y'''), etc. redeviennent y', y'', y''', etc.

CHAPITRE VIII.

Théorie générale des équations dérivées et des constantes arbitraires.

Nous avons démontré (chap. VII) que toute équation entre deux variables x et y, par laquelle l'une de ces variables est fonction de l'autre, subsiste égalément en prenant les différentielles successives sur dx, dx^2, etc., ou sur dy, dy^2, etc., suivant que y est regardé comme fonction de x, ou x comme fonction de y. Ces équations, que nous nommerons désormais *équations dérivées*, ayant lieu en même tems que l'équation donnée, que nous nommerons *équation primitive*, il s'ensuit qu'une combinaison quelconque de ces différentes équations, aura lieu aussi; donc, comme les constantes qui entrent dans la fonction primitive, restent les mêmes dans les équations dérivées successives, on pourra toujours, par le moyen de ces équations dérivées, éliminer autant de constantes de l'équation primitive qu'on aura d'équations dérivées : l'équation résultante de cette élimination sera une équation de même ordre que la plus haute des équations dérivées, laquelle sera vraie en même tems que l'équation primitive, et pourra, par conséquent, en tenir lieu; elle renfermera autant de constantes de moins que l'exposant de son ordre contiendra d'unités.

Ainsi, l'équation primitive combinée avec les équations dérivées première et seconde, donnera une équation du second ordre, renfermant deux constantes de moins que l'équation primitive, et ainsi de suite.

On ne peut parvenir que d'une seule manière à l'équation

du premier ordre qui résulte de l'équation primitive et de son équation dérivée immédiate, par l'élimination d'une constante donnée; mais on peut parvenir de deux manières différentes à l'équation du second ordre, déduite de la primitive et de ses deux premières dérivées, par l'élimination de deux constantes données; et ce double point de vue donne lieu à des conséquences importantes relatives à ce genre d'équations.

Au lieu d'éliminer à-la-fois les deux constantes par le moyen des trois équations dont il s'agit, on peut n'éliminer d'abord que l'une ou l'autre de ces constantes, à l'aide de l'équation primitive et de sa dérivée première; on aura ainsi deux équations dérivées différentes du premier ordre, dont l'une ne contiendra que l'une des constantes, et l'autre ne contiendra que l'autre constante. Maintenant, en combinant chacune de ces dernières équations avec sa dérivée, on pourra aussi en éliminer la constante qui y était restée, et on aura deux équations du second ordre sans les deux constantes, lesquelles devront être équivalentes entre elles, en même tems qu'elles seront aussi les mêmes que la dérivée du second ordre, qui résulte de l'élimination simultanée des deux constantes au moyen des deux dérivées immédiates.

En effet, chacune de ces équations donnera la valeur du coefficient différentiel du second ordre de la variable, qu'on regarde comme fonction de l'autre, valeur qui sera exprimée par le coefficient différentiel du premier ordre de la même variable, et par les deux variables mêmes, sans deux des constantes qui entrent dans l'équation primitive; et il est facile de se convaincre que cette valeur est unique et déterminée, de quelque manière qu'on y parvienne, puisque les fonctions dérivées sont uniques et déterminées, et que les résultats de l'élimination sont aussi toujours déterminés.

On doit conclure de là qu'une équation du second ordre peut être dérivée de deux équations différentes du premier

ordre, renfermant chacune une constante arbitraire de plus, et que ces équations seront, par conséquent, deux équations primitives de la même équation du second ordre, mais primitives du premier ordre, pour les distinguer de l'équation primitive absolue, d'où celles-ci sont censées dérivées.

Enfin, on peut étendre aux équations des ordres supérieurs au second, le raisonnement que nous venons de faire sur celles de cet ordre, et on en conclura, de la même manière, qu'une équation du troisième ordre peut être dérivée de trois équations différentes du second ordre, et qu'alors elle peut avoir trois équations primitives de cet ordre, ayant chacune une constante arbitraire de moins, et ainsi de suite.

Nous allons éclaircir et confirmer cette théorie par quelques exemples.

Soit l'équation du premier degré

$$y + ax + b = 0;$$

en regardant y comme fonction de x, on en déduira

$$\frac{dy}{dx} + a = 0.$$

En éliminant a, au moyen de ces deux équations, on obtiendra l'équation du premier ordre

$$y - x\frac{dy}{dx} + b = 0,$$

dont l'équation primitive sera $y + ax + b = 0$, a étant la constante arbitraire.

Si la constante b dépendait de a, et qu'on eût, par exemple, $b = a^2$, alors en éliminant a, c'est-à-dire, en substituant $-\frac{dy}{dx}$ pour a, on aurait l'équation du premier ordre

$$y - x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

et l'équation primitive de celle-ci serait

$$y + ax + a^2 = 0,$$

a étant la constante arbitraire.

Supposons $b = c\sqrt{1 + a^2}$, on aura l'équation du premier ordre

$$y - x\frac{dy}{dx} + c\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0,$$

dont l'équation primitive sera

$$y + ax + c\sqrt{1 + a^2} = 0,$$

où a est la constante arbitraire, puisqu'elle ne se trouve pas dans la dérivée du premier ordre.

Soit encore l'équation

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0,$$

sa dérivée sera

$$x - a\frac{dy}{dx} = 0,$$

équation du premier ordre qui ne renferme plus b, et dont la proposée est l'équation primitive, b étant la constante arbitraire.

Mais si l'on veut que la constante arbitraire soit a, alors il faut éliminer a; or, la dérivée donne $a = \frac{x}{\frac{dy}{dx}}$; donc substituant cette valeur dans la proposée, elle donnera

$$x^2 - \frac{2xy}{\frac{dy}{dx}} - \frac{x^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - b = 0,$$

ou bien

$$(x^2-b)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2xy\frac{dy}{dx}-x^2=0.$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx}\sqrt{(x^2+y^2-b)}-y\frac{dy}{dx}-x=0,$$

équation du premier ordre, dont la primitive, qui est la proposée, aura pour constante arbitraire, la quantité a.

Si l'on voulait éliminer à-la-fois les constantes a et b, il faudrait employer la dérivée seconde; ainsi, puisqu'on a déja trouvé la dérivée du premier ordre

$$x-a\frac{dy}{dx}=0,$$

où b ne se trouve plus, il n'y aura qu'à former l'équation dérivée de celle-ci, laquelle sera

$$1-a\frac{d^2y}{dx^2}=0,\quad \text{d'où}\quad a=\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

et cette valeur, substituée dans la précédente, donnera

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0,$$

équation du second ordre, dont la proposée sera la primitive absolue, a et b étant les deux constantes arbitraires.

On parviendrait à la même équation, en faisant disparaître b de l'équation du premier ordre

$$\frac{dy}{dx}\sqrt{x^2+y^2-b}-y\frac{dy}{dx}-x=0,$$

trouvée plus haut; car en prenant la dérivée, on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2}\sqrt{(x^2+y^2-b)}+\frac{\frac{dy}{dx}\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{(x^2+y^2-b)}}-y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1=0;$$

en éliminant b au moyen de la précédente, il viendra

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}\left(y\frac{dy}{dx}+x\right)}{\frac{dy}{dx}}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1=0,$$

c'est-à-dire, comme on l'a trouvé plus haut,

$$\frac{x\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}}-1=0,\quad \text{ou}\quad x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0.$$

On voit aussi que cette même équation du second ordre a deux équations primitives ou deux intégrales du premier ordre, qui sont

$$x-a\frac{dy}{dx}=0,\quad \frac{dy}{dx}\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}-y\frac{dy}{dx}-x=0,$$

où a et b sont les deux constantes arbitraires; et ces deux équations, par l'élimination du $\frac{dy}{dx}$, conduisent à cette équation primitive absolue

$$\frac{x}{a}\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}-\frac{yx}{a}-x=0,$$

qui se réduit à

$$\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}-y-a=0;$$

en faisant disparaître le radical, on retrouve

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0,$$

qui est la proposée.

En éliminant ainsi les constantes qu'on veut faire disparaître, on tombe souvent, comme on le voit, sur des équations où le plus haut coefficient différentiel est élevé à des puissances, et il faut alors recourir à la résolution.

On peut cependant parvenir directement à une équation dérivée où le plus haut coefficient différentiel ne se trouve qu'au premier degré. Pour cela, il n'y a qu'à préparer l'équation primitive de manière que la constante arbitraire qu'on veut faire disparaître, s'en aille d'elle-même par la différentiation, ce qui arrive lorsque cette constante est isolée, ou lorsqu'elle forme seule un des membres de l'équation; car alors la différentielle de cette constante, étant nulle, l'équation dérivée se trouvera délivrée de cette constante, et le plus haut coefficient différentiel y sera nécessairement à la première dimension; car lorsqu'on différentie une équation entre plusieurs variables, dont chacune est fonction d'une même variable, chaque variable ne peut donner que des termes multipliés par le coefficient différentiel de la même variable (chap. V). Or, il est évident que cette préparation n'exige que la résolution de la proposée, par rapport à la constante qu'on veut éliminer, considérée comme inconnue. Ainsi, on peut obtenir, par ce moyen, le résultat qu'on aurait par la résolution de l'équation dérivée, par rapport au coefficient différentiel de l'ordre le plus élevé.

Dans le second exemple, où l'équation primitive était

$$y + ax + a^2 = 0,$$

nous avons trouvé l'équation dérivée

$$y - x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0;$$

laquelle donne, par la résolution,

$$2\frac{dy}{dx} = x + \sqrt{x^2 - 4y}.$$

Mais en résolvant d'abord l'équation, par rapport à la constante a, on trouve

$$2a = -x + \sqrt{x^2 - 4y},$$

qui a pour dérivée

$$-1 + \frac{x - 2\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2 - 4y}} = 0,$$

savoir, en multipliant par $\sqrt{x^2 - 4y}$,

$$x - 2\frac{dy}{dx} - \sqrt{x^2 - 4y} = 0;$$

équation qui coïncide avec la précédente, à cause de l'ambiguité du signe du radical.

On peut de la même manière faire disparaître successivement plusieurs constantes, en préparant toujours l'équation de manière que la constante à éliminer soit dégagée des variables.

Ainsi, l'équation primitive

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0,$$

contenant la constante b isolée, donne tout de suite l'équation du premier ordre sans b,

$$x - a\frac{dy}{dx} = 0;$$

ensuite, en dégageant a, on a

$$a = \frac{x}{\frac{dy}{dx}};$$

d'où on déduit, en différentiant de part et d'autre et appliquant la règle de la différentiation des fractions,

$$\frac{1}{\frac{dy}{dx}} - x\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0, \text{ ou } \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

comme plus haut.

En commençant l'élimination par la constante a, nous avons trouvé l'équation dérivée du premier ordre

$$x^2 - \frac{2xy}{\frac{dy}{dx}} - \frac{x^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - b = 0.$$

Comme la constante b est dégagée des variables, il n'y a qu'à prendre la dérivée pour avoir de suite celle du second ordre sans a ni b : on trouve ainsi

$$x - \frac{y}{\frac{dy}{dx}} - x + \frac{xy\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - \frac{x}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + x^2\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3} = 0,$$

équation qui se réduit à cette forme

$$\left\{\frac{x\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}} - 1\right\}\left\{\frac{y}{\frac{dy}{dx}} + \frac{x}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right\} = 0.$$

Comme le second facteur ne renferme que le coefficient différentiel du premier ordre, il ne peut donner une équation du second ordre; ainsi, c'est l'autre facteur $\frac{x\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}} - 1$ qu'il

faut employer, et l'on a

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0,$$

comme ci-dessus.

Ces exemples suffisent pour montrer comment les équations dérivées se forment des équations primitives par l'évanouissement des constantes. On voit que pour une équation primitive donnée, il est toujours possible de trouver une équation dérivée qui renferme autant de constantes de moins qu'il y aura d'unités dans l'ordre de cette équation dérivée, et que de quelque manière qu'on parvienne à cette équation, et sous quelque forme qu'elle se présente, elle sera toujours essentiellement la même.

Puisque dans les équations à deux variables, une équation du premier ordre peut renfermer une constante de moins que l'équation primitive, une équation du second ordre peut renfermer deux constantes de moins que l'équation primitive, et ainsi de suite; il s'ensuit réciproquement que l'équation primitive, ou l'intégrale, peut contenir une constante de plus que la dérivée du premier ordre, deux constantes de plus que la dérivée du second ordre, et ainsi de suite; constantes qui sont, par conséquent, arbitraires; et on voit, en même tems, qu'elles ne pourraient en contenir un plus grand nombre, puisqu'on ne pourrait les faire disparaître toutes par le moyen des équations dérivées.

On peut encore donner de cette proposition, une démonstration directe, tirée de l'expression générale de la fonction primitive.

Nous avons démontré (pag. 21) que y étant une fonction quelconque de x, si on dénote par y^0, y'^0, y''^0, etc., les valeurs correspondantes à $x=0$, de y et de ses coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., que nous avons souvent désignés par

y', y'', y''', etc., on avait, en supprimant les parenthèses, cette série

$$y = y^{\circ} + y'^{\circ} x + y''^{\circ} \frac{x^2}{1.2} + y'''^{\circ} \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

connue sous le nom de théorème de *Maclaurin*.

Maintenant, si la valeur de y est donnée par une équation du premier ordre entre x, y et y', on en déduira la valeur de y' en x et y; de l'équation du premier ordre, on en conclura une du second en x, y, y', y'', qui donnera y'' en x, y et y', ou seulement en x et y; de l'équation du second ordre, on en conclura une troisième en x, y, y', y'', y''', qui fera connaître y''' en x, y, y' et y'', ou en x, y, et ainsi de suite. Or, en faisant $x=0$, y deviendra y°; les coefficiens différentiels y', y'', y''', etc., qui sont des fonctions de x et y, deviendront y'°, y''°, y'''°, etc., et on aura les valeurs de y'°, y''°, etc., exprimées en y°, qui sera la constante arbitraire de l'équation primitive absolue de la dérivée du premier ordre.

De même si on n'a, pour la détermination de y, qu'une équation dérivée du second ordre en x, y, y', y'', on en déduira successivement des équations des ordres supérieurs, en x, y, y', y'', y''', en x, y, y', y'', y''', y^{iv}, et ainsi de suite; et par les substitutions successives des valeurs de y'', y''', etc., données par les équations précédentes, on aura, en dernière analyse, y'', y''', etc. en x, y, y', de sorte qu'en faisant $x=0$, on aura les valeurs de y'', y''', etc. en y°, y'°, ces deux quantités restant indéterminées; en sorte que la fonction primitive absolue, ou l'équation en x et y, de laquelle on déduit la dérivée du second ordre, contiendra deux constantes arbitraires, et ainsi de suite.

Donc, en général, l'expression de y en x renfermera autant de constantes indéterminées qu'il y aura d'unités dans l'exposant

de l'ordre de l'équation qui détermine la fonction y; et quoique cette conclusion soit fondée sur la théorie des séries, il n'est pas difficile de se convaincre qu'elle doit avoir lieu généralement, quelle que soit l'expression de y, puisqu'on peut toujours regarder une expression en série comme le développement d'une expression finie.

Dans l'analyse précédente, les constantes arbitraires sont toujours les valeurs de y, y', y'', etc., qui répondent à $x=0$, tandis que si on envisage comme nous l'avons fait plus haut, les équations dérivées comme le résultat de l'élimination des constantes, ces constantes peuvent être quelconques; mais il est toujours facile de les réduire les unes aux autres; car quelles que soient les constantes qui entrent dans l'expression de y, si on déduit de cette expression celles de y', y'', y''', etc., et qu'ensuite on fasse $x=0$, ce qui changera les valeurs de y, y', y'', etc. en y°, y'°, y''°, etc., on pourra toujours, en prenant autant de ces valeurs qu'il y a de constantes arbitraires, déterminer celles-ci en y°, y'°, y''°, etc., et les substituer ensuite dans l'expression générale de y. Or, quelle que puisse être la forme générale de cette expression, ou de l'équation d'où elle dépend, à raison des différentes constantes qui y seront contenues, il est visible que lorsque ces constantes seront évaluées en $y^{\circ}, y'^{\circ}, y''^{\circ}$, etc., cette forme deviendra nécessairement la même pour la même équation dérivée.

On peut donc conclure, en général, que si on a une équation dérivée d'un ordre quelconque entre x, y, y', y'', etc., et que l'on trouve, de quelque manière que ce soit, une équation entre x et y, qui y satisfasse, et qui renferme autant de constantes arbitraires qu'il y aura d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation dérivée, cette équation sera l'équation primitive de la proposée, avec toute la généralité dont elle est susceptible, de sorte qu'elle renfermera nécessairement

toute autre équation qui, avec autant de constantes arbitraires, pourrait aussi satisfaire à la même équation dérivée.

On voit par là que les constantes arbitraires forment la liaison entre les équations primitives et les équations dérivées. Celles-ci sont, par leur nature, plus générales que les équations d'où elles dérivent, à raison des constantes qui ont disparu ou qui peuvent avoir disparu ; elles équivalent à toutes les équations primitives qui ne différeraient que par les valeurs particulières de ces constantes.

On pourra donc toujours passer d'une équation primitive à une de ses dérivées d'un ordre quelconque, et revenir de celle-ci à une nouvelle équation primitive, pourvu que cette dernière opération, qu'on appelle *intégration*, y introduise le nombre requis de constantes arbitraires : alors, cette dernière équation renfermera la première, et lui deviendra équivalente en déterminant convenablement ses constantes arbitraires.

Comme nous avons vu qu'une équation du second ordre peut provenir de deux équations différentes du premier ordre, renfermant chacune une constante arbitraire ; qu'une équation du troisième ordre peut être dérivée de même de trois équations différentes du second, et ainsi de suite ; il est naturel d'en conclure aussi réciproquement que toute équation du second ordre aura deux équations primitives du premier ordre, chacune avec une constante arbitraire, et ainsi de suite. Mais nous pouvons démontrer aussi cette proposition d'une manière directe, par une analyse semblable à celle que nous avons employée ci-dessus.

Reprenons la formule générale de *Taylor*

$$f(x+i)=fx+i\frac{\mathrm{d}(fx)}{\mathrm{d}x}+\frac{i^2}{1.2}\frac{\mathrm{d}^2(fx)}{\mathrm{d}x^2}+\text{etc.}$$

et faisons $i=-x$; alors $f(x+i)$ deviendra $f(x-x)$,

c'est-à-dire, égale à la valeur de fx ou de y, lorsqu'on y fait $x = 0$, valeur que nous avons désignée plus haut par y°. Ainsi on aura en représentant fx par y

$$y^{\circ} = y - xy' + \frac{x^2}{1.2}y'' - \frac{x^3}{1.2.3}y''' + \text{etc.}$$

Si on différentie les deux membres de l'identité générale par rapport à x, on aura celle-ci

$$\frac{\mathrm{d}f(x+i)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(fx)}{\mathrm{d}x} + i\frac{\mathrm{d}^2(fx)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{i^2}{1.2}\frac{\mathrm{d}^3(fx)}{\mathrm{d}x^3} + \text{etc.}$$

Donc, faisant de nouveau $i = -x$, ce qui donnera.... $\frac{\mathrm{d}\,f(x+i)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\,f(x-x)}{\mathrm{d}x} = y'^{\circ}$, en observant que $f(x-x)$ n'est autre chose que y en y faisant $x = 0$, et qu'ainsi..... $\frac{\mathrm{d}\,f(x-x)}{\mathrm{d}x}$ n'est que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ou y', en y faisant aussi $x = 0$, on aura

$$y'^{\circ} = y' - xy'' + \frac{x^2}{1.2}y''' - \frac{x^3}{1.2.3}y^{\text{iv}} + \text{etc.}$$

On trouvera de la même manière

$$y''^{\circ} = y'' - xy''' + \frac{x^2}{1.2}y^{\text{iv}} - \frac{x^3}{1.2.3}y^{\text{v}} + \text{etc.}$$

Cela posé, si la fonction y est donnée par une équation du premier ordre, on en déduira les valeurs de y', y'', y''', etc., toutes données en x et y, comme on l'a vu plus haut : si on les substitue dans la formule

$$y^{\circ} = y - xy' + \frac{x^2}{1.2}y'' - \frac{x^3}{1.2.3}y''' + \text{etc.}$$

on aura une équation entre x, y et la constante arbitraire y°.

Si y est donnee par une équation du second ordre, on aura y'', y''', y^{IV}, etc., données en x, y, y'; donc, substituant ces valeurs dans les deux formules

$$y^{\circ} = y - xy' + \frac{x^2}{1.2}y'' - \frac{x^3}{1.2.3}y''' + \text{etc.}$$

$$y'^{\circ} = y' - xy'' + \frac{x^2}{1.2}y''' - \frac{x^3}{1.2.3}y^{\text{IV}} + \text{etc.}$$

on aura deux équations en x, y, y', ayant chacune une des constantes arbitraires y°, y'°, lesquelles seront également deux équations primitives du premier ordre de la proposée du second ordre, et ainsi de suite.

Quoique ces équations soient en séries, les conclusions qu'on peut en tirer relativement à la nature des équations primitives, n'en sont pas moins exactes; et il est visible, par la forme même de ces équations, qu'elles sont essentiellement différentes, et qu'il ne peut y en avoir qu'un nombre égal à celui de l'ordre de l'équation donnée.

On en conclura donc aussi que si, pour une équation du second ordre, on trouve, d'une manière quelconque, deux équations différentes du premier ordre qui y satisfassent, et qui renferment chacune une constante arbitraire, on aura les deux équations primitives du premier ordre de la proposée, et toute autre équation de cet ordre qui y satisferait avec une constante arbitraire, sera nécessairement renfermée dans celles-ci.

Ces deux équations primitives étant connues, on pourra toujours en déduire l'équation primitive absolue, en éliminant, par leur moyen, le coefficient différentiel du premier ordre qu'elles contiennent, et qui est le même dans les deux équations. L'équation résultante ne contenant plus de coeffi-

ciens différentiels, sera la primitive absolue de la dérivée du second ordre; et comme les deux constantes arbitraires qui entraient dans les deux dérivées du premier ordre, se trouveront dans cette équation, elle aura toute la généralité dont elle est susceptible.

Donc, ayant une équation du second ordre, on aura également son équation primitive absolue, soit qu'on trouve immédiatement une équation entre les mêmes variables, qui y satisfasse, et qui renferme en même tems deux constantes arbitraires, soit qu'on trouve séparément deux équations du premier ordre qui y satisfassent chacune en particulier, et qui renferment chacune une constante arbitraire.

Mais si l'une de ces équations du premier ordre ne contenait point de constante arbitraire, alors l'équation primitive qu'on en déduirait, ne contenant qu'une seule constante arbitraire, n'aurait pas toute la généralité qu'elle peut avoir, mais elle satisferait toujours à l'équation du second ordre d'où on l'aurait tirée, en même tems qu'elle satisfera aux deux du premier ordre.

Il suit encore de là que si on a une équation du premier ordre, et qu'on en déduise, d'une manière quelconque, une équation du second ordre, soit en éliminant une constante ou non, qu'ensuite on passe de celle-ci à une autre équation primitive du premier ordre, avec une constante arbitraire, on pourra, par l'élimination du coefficient différentiel qui se trouve dans les deux équations du premier ordre, obtenir une équation entre les deux variables et la constante arbitraire, qui sera, par conséquent, l'équation primitive absolue de la proposée du premier ordre.

En général, si de la proposée du premier ordre on passe par des différentiations successives à une équation d'un ordre supérieur, et si on trouve, d'une manière quelconque,

une équation primitive de celle-ci d'un ordre immédiatement inférieur avec une constante arbitraire, on pourra toujours, par l'élimination successive des coefficiens différentiels, parvenir à une équation entre les deux variables x et y, et une constante, qui sera la primitive absolue de la proposée. En effet, si d'une équation du premier ordre, que nous représenterons par $(x, y, y')=0$, on a tiré par la différentiation les suivantes $(x, y, y', y'')=0$, $(x, y, y', y'', y''')=0$, et si l'on a pu découvrir une primitive de cette dernière qui soit.... $(x, y, y', y'', a)=0$; alors en éliminant y'' entre celle-ci et $(x, y, y', y'')=0$, puis y' entre le résultat, et $(x, y, y')=0$, on aura la primitive absolue de la proposée avec la constante a.

Enfin, on peut étendre aux équations des ordres supérieurs au second, ce que nous venons de trouver relativement à celles de cet ordre, et en déduire des conclusions semblables.

Pour completter cette doctrine des constantes arbitraires introduites par l'intégration, nous démontrerons que si Fx et φx sont deux fonctions primitives ou deux intégrales d'un même ordre de fx, elles ne pourront différer l'une de l'autre que par une constante : que fx soit, par exemple, un coefficient différentiel du premier ordre, on aura, par hypothèse,

$$\frac{\mathrm{d}.Fx}{\mathrm{d}x}=fx,\quad \frac{\mathrm{d}.\varphi x}{\mathrm{d}x}=fx;$$

donc, en prenant les fonctions dérivées successives, on aura aussi

$$\frac{\mathrm{d}^2.Fx}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}.fx}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}^3.Fx}{\mathrm{d}x^3}=\frac{\mathrm{d}^2.fx}{\mathrm{d}x^2},\ \text{etc.}$$

et pareillement

$$\frac{\mathrm{d}^2.\varphi x}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}.fx}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}^3.\varphi x}{\mathrm{d}x^3}=\frac{\mathrm{d}^2.fx}{\mathrm{d}x^2},\ \text{etc.}$$

Considérons maintenant les fonctions $F(x+i)$, $\phi(x+i)$; on sait que

$$F(x+i)=Fx+i\frac{d.Fx}{dx}+\frac{i^2}{1.2}.\frac{d^2.Fx}{dx^2}+\text{etc.}$$

développement qui, par la substitution des valeurs de $\frac{d.Fx}{dx}$, $\frac{d^2.Fx}{dx^2}$, etc., devient

$$F(x+i)=Fx+ifx+\frac{i^2}{1.2}\frac{d.fx}{dx}+\frac{i^3}{1.2.3}\frac{d^2.fx}{dx^2}+\text{etc.}$$

et de même

$$\varphi(x+i)=\phi x+ifx+\frac{i^2}{1.2}.\frac{d.fx}{dx}+\frac{i^3}{1.2.3}\frac{d^2fx}{dx^2}.$$

Retranchant l'une de l'autre ces deux identités, il restera

$$F(x+i)-\varphi(x+i)=Fx-\phi x.$$

Comme cette identité doit avoir lieu, quels que soient x et i, et que le premier membre est une fonction de $x+i$, et le second une pareille fonction de x, il faut que $Fx-\varphi x$ soit une fonction telle qu'elle reste égale à elle-même, lorsqu'on change x en $x+i$, ce qui ne peut avoir lieu à moins que cette fonction ne soit indépendante de x : on aura donc

$$Fx-\phi x=k, \quad \text{d'où} \quad Fx=\varphi x+k,$$

k étant une constante. Donc, si φx est une fonction primitive ou une intégrale de fx, toute autre fonction primitive Fx de fx ne pourra différer de φx que par une constante.

Ainsi, la fonction donnée en x étant $\frac{d^ny}{dx^n}=fx$, si l'on

en a déduit d'une manière quelconque $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, en y ajoutant une constante arbitraire, on aura la primitive complette immédiate de la proposée.

Ainsi, du coefficient différentiel du troisième ordre

$$\frac{d^3y}{dx^3} = ax^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

on conclut celui du second

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ax^5}{5} + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

b étant la constante; en sorte que l'intégrale de $d^3y = ax^4dx^3$ est

$$d^2y = \frac{a}{5} x^5dx + bdx.$$

De (2) on repasse au coefficient différentiel du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{5.6} x^6 + bx + c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

c étant une autre constante; d'où on conclut l'intégrale seconde

$$dy = \frac{a}{5.6} x^6dx + bxdx + cdx;$$

enfin, de (3) on tire

$$y = \frac{a}{5.6.7} x^7 + \frac{b}{2} x^2 + cx + f,$$

fonction en x, la plus générale de toutes celles qui conduisent à $\frac{d^3y}{dx^3} = ax^4$, parce qu'elle renferme trois constantes b, c, f.

Ce chapitre est tiré, à quelques légers développemens près, *du Calcul des fonctions de M. Lagrange :* nous le terminerons

par la question suivante extraite *de la Correspondance sur l'École Polytechnique*, n°. 11. *Janv.* 1810.

L'équation générale des lignes du second degré, peut être mise sous la forme

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + 1 = 0 \ldots\ldots (M)$$

et elle contient alors les cinq constantes A, B, C, D, E. Si l'on différentie cette équation cinq fois de suite, on aura cinq nouvelles équations, entre lesquelles et (M) on peut éliminer les cinq constantes. Si l'on pose

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = q, \quad \frac{dq}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = r,$$

$$\frac{dr}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4} = s, \quad \frac{ds}{dr} = \frac{d^5y}{dx^5} = t,$$

on trouve, pour équation générale délivrée des cinq constantes,

$$9q^2t - 45qrs + 40r^3 = 0 \ldots\ldots (N)$$

Cette équation appartient à toutes les courbes du second degré, et les exprime toutes, quelles que puissent être les cinq constantes.

Cela posé, soit proposée une équation différentielle ordinaire, qui n'excède pas le quatrième ordre ; il est facile de reconnaître si elle appartient à une courbe du premier ordre : pour cela, il suffit de différentier successivement jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une équation différentielle du cinquième ordre, et de s'assurer si la proposée, au moyen de ses dérivées, satisfait à l'équation générale (N). Si cela a lieu, la proposée appartient, en effet, à une courbe du second degré, et son intégrale ou sa primitive complette, est l'équation (M), dans laquelle il y a autant de constantes de trop, qu'il a fallu différentier de fois pour arriver à la dérivée du cinquième ordre ;

il faut donc déterminer les constantes surnuméraires de telle manière que l'intégrale n'ait que la généralité nécessaire. A cet effet, il faudra différentier l'intégrale obtenue, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'ordre de la proposée; ensuite, au moyen de ces différentielles successives, éliminer de la proposée toutes les quantités p, q, r, etc. : il ne restera plus qu'une équation en x, y, A, B, C, D, E, et il faudra trouver, entre les cinq constantes, les relations qui satisferont à cette équation.

Soit, par exemple, l'équation différentielle du troisième ordre

$$(1+p^2)r = 3pq^2 \ldots\ldots (1)$$

en différentiant deux fois de suite, on a

$$(1+p^2)^2 s = 3q^3\,(1+5p^2) \ldots\ldots (2)$$

$$(1+p^2)^3 t = 15pq^4(3+7p^2) \ldots\ldots (3)$$

La substitution dans (N) des valeurs de r, s, t, tirées de ces trois équations, satisfait à (N); donc l'intégrale de (1) est de la forme

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + 1 = 0.$$

Mais cette équation contient deux constantes de trop, puisque l'intégrale d'une équation différentielle du troisième ordre est complettée par trois constantes seulement : il faut donc trouver deux relations entre les cinq constantes. Pour cela on différentiera trois fois de suite l'intégrale (M), et on trouvera

$$p = -\frac{N}{M}$$

$$q = -\frac{(AN^2 - 2BMN + CM^2)}{M^3}$$

$$r = -\frac{3(AN^2 - 2BNM + CM^2)(AN - BM)}{M^5},$$

où $M = Ay + Bx + D$ et $N = By + Cx + E$. Si l'on substitue ces valeurs de p, q, r, dans la proposée (1), on parvient à l'équation suivante

$$M\{AN^2 - 2BMN + CM^2\}\{B(M^2 - N^2) + MN(C - A)\} = 0.$$

Or, des trois facteurs dont elle est composée, les deux premiers ne sont pas utiles : en effet, le premier, M, c'est-à-dire, $Ay + Bx + D$, ne peut devenir nul par lui-même, à moins que l'on n'ait $A = 0$, $B = 0$, $D = 0$, en observant que ces relations doivent avoir lieu seulement entre les coefficiens; or, de cette manière, on aurait trois relations lorsqu'il n'en faut que deux. Le second facteur $AN^2 - 2BMN + CM^2$, ne peut devenir nul, que sous ces conditions $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$; et si, dans le même facteur, on faisait $M = 0$, $N = 0$, toutes les constantes deviendraient nulles, chacune en particulier. Il n'y a donc que le troisième facteur qui devient nul, au moyen des deux relations

$$B = 0, \quad C = A,$$

en sorte que la primitive complette de la proposée devient

$$A(y^2 + x^2) + 2Dy + 2Ex + 1 = 0,$$

équation qui appartient à un cercle quelconque, comme on s'en assure en faisant

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}, \quad B = \frac{-b}{a^2 + b^2 - c^2}, \quad C = \frac{-a}{a^2 + b^2 - c^2},$$

a, b, c, étant trois autres constantes arbitraires; car alors on a

$$y^2 + x^2 - 2(ay + bx) + a^2 + b^2 - c = 0,$$

c'est-à-dire,

$$(y - a)^2 + (x - b)^2 = c^2.$$

« Ce serait, dit M. *Monge*, à qui on doit cette analyse,
« une entreprise inutile de chercher de semblables résultats pour
« les courbes des différens degrés, principalement parce qu'à
« l'inspection d'une équation différentielle, on ne peut recon-
« naître si elle appartient à une courbe algébrique, ni de quel
« degré est cette courbe. Mais les courbes du second degré
« sont si simples, et elles se présentent si fréquemment dans
« la nature, qu'il peut être de quelqu'utilité de le faire pour
« elles. »

CHAPITRE IX.

Du développement de f(x+i) *lorsqu'on donne à la variable* x *une valeur déterminée. Cas dans lesquels ce développement est en défaut.*

Nous avons vu (chap. I) que la série donnée par le développement de $f(x+i)$, ne peut contenir de puissances négatives de i, à moins que l'on n'ait $fx=\infty$, parce qu'en supposant $i=0$, auquel cas $f(x+i)$ se réduit à fx, les termes qui contiendraient de pareilles puissances, deviendraient infinis, de sorte qu'on aurait l'équation $\frac{1}{fx}=0$, de laquelle on déduirait des valeurs de x. On peut prouver de la même manière que la série ne pourra contenir un terme multiplié par $\log i$, ou par une puissance positive quelconque de $\log i$, parce que ces sortes de termes deviennent également infinis pour $i=0$ (pag. 37).

Considérons ensuite le cas où le développement pourrait contenir des puissances positives, mais fractionnaires de i. La démonstration donnée (chap. I) pour prouver l'absence de ces sortes de termes, est fondée sur ce que ces termes augmenteraient le nombre des radicaux dans le développement de $f(x+i)$, tandis qu'il est évident que tant que x est une quantité quelconque indéterminée, $f(x+i)$ ne peut contenir que les radicaux qui sont dans fx; et nous savons actuellement que la différentiation ne peut changer ni le

nombre ni les indices de ces radicaux dans $\frac{dy}{dx}=P$, $\frac{d^2y}{dx^2}=Q$, $\frac{d^3y}{dx^3}=R$, etc. Mais cette démonstration cesse d'avoir lieu lorsqu'on donne à x une valeur déterminée, telle qu'elle fasse disparaître un radical dans fx; car alors ce radical pourra être remplacé par un radical de i dans le développement de $f(x+i)$, comme nous l'avons vu dans le chapitre cité.

Cette conclusion n'aurait pas lieu, si la valeur particulière de x n'anéantissait pas le radical lui-même, mais le faisait seulement disparaître en rendant nulle une quantité par laquelle il serait multiplié ; car quoique le radical puisse disparaître de cette manière de la fonction fx, il pourrait ne pas disparaître dans les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., qui entrent dans le développement de $f(x+i)$, et alors la démonstration conserverait toute sa force. Ainsi, si un radical de la fonction fx se trouvait multiplié par $(x-a)^m$, m étant un nombre entier positif, ce radical disparaitrait pour $x=a$; mais dans $f(x+i)$, le même radical serait multiplié par $(x-a+i)^m$, et, dans le cas de $x=a$, il le serait par i^m; donc, dans le développement de $f(x+i)$, il ne pourrait paraître avant le terme qui contiendrait la puissance i^m : en effet, le coefficient différentiel $\frac{d^my}{dx^m}$ serait le premier dans lequel $(x-a)^m$ serait réduit à l'unité, au moins dans l'un des termes, en sorte que, dans ce terme, le radical ne disparaîtrait plus par son coefficient ; il resterait conséquemment dans les coefficiens différentiels suivans, et il ne se trouverait pas dans les précédens. Il n'y a donc que le cas où le radical est détruit de lui-même dans fx, par une valeur particulière de x, dans lequel le développement doive contenir des puissances fractionnaires de i, et il reste à voir comment on pourra juger que la chose doive avoir lieu.

Nous remarquerons d'abord que si, dans $f(x+i)$, on ajoute l'accroissement quelconque k, soit à x, soit à i, on aura la même somme $x+i+k$, et conséquemment la même fonction variée $f(x+i+k)$. Or, si l'on considère $x+i$ comme une variable dont k est l'accroissement, la fonction développée sera

$$f((x+i)+k)=f(x+i)+kf'(x+i)+\frac{k^2}{1.2}f''(x+i)+\text{etc.}$$

en observant que $f'(x+i)$ est le coefficient de la différentielle première de $f(x+i)$, prise indifféremment ou par rapport à x, ou par rapport à i; que $f''(x+i)$ est celui de la différentielle seconde de $f(x+i)$, prise aussi ou par rapport à x, ou par rapport à i, et ainsi de suite; de sorte qu'on a

$$f'(x+i)=\frac{\mathrm{d}f(x+i)}{\mathrm{d}i}=\frac{\mathrm{d}f(x+i)}{\mathrm{d}x}$$

$$f''(x+i)=\frac{\mathrm{d}^2f(x+i)}{\mathrm{d}i^2}=\frac{\mathrm{d}^2f(x+i)}{\mathrm{d}x^2}$$

$$f'''(x+i)=\frac{\mathrm{d}^3f(x+i)}{\mathrm{d}i^3}=\frac{\mathrm{d}^3f(x+i)}{\mathrm{d}x^3},$$

etc.

d'où on conclut qu'en faisant $i=0$ dans $\frac{\mathrm{d}f(x+i)}{\mathrm{d}i}$, $\frac{\mathrm{d}^2f(x+i)}{\mathrm{d}i^2}$, etc., on tombe sur $\frac{\mathrm{d}fx}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2fx}{\mathrm{d}x^2}$, etc.

Maintenant, pour introduire la condition que le développement général n'ait pas lieu, circonstance qui ne peut arriver qu'autant qu'on particularise x, nous supposerons une puissance de i, qui ne soit pas entière et positive; et afin de séparer ce qui résulte de la présence d'un terme de puissance

négative de i, de ce qui vient d'un terme de puissance fractionnaire de cet accroissement, nous supposerons d'abord un terme tel que Ai^{-m}, en sorte que

$$f(x+i) = Ai^{-m} + Bi^r + Ci^s + Di^t + \text{etc.}$$

r, s, t, etc., étant des nombres entiers positifs, A, B, C, etc. des fonctions de x, ou de sa valeur particulière a. On aura donc

$$\frac{\mathrm{d}f(x+i)}{\mathrm{d}i} = -mAi^{-m-1} + rBi^{r-1} + sCi^{s-1} + \text{etc.}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2f(x+i)}{\mathrm{d}i^2} = +m(m+1)Ai^{-m-2} + r(r-1)Bi^{r-2} + \text{etc.}$$

$$\frac{\mathrm{d}^3f(x+i)}{\mathrm{d}i^3} = -m(m+1)(m+2)Ai^{-m-3} + r(r-1)(r-2)Bi^{r-3}\ \text{etc.}$$

etc.

et, pour en revenir aux coefficiens différentiels $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^3}$, etc., on fera $i=0$, ce qui donnera ces résultats :

$$fx = \frac{A}{0} + \text{etc.} = \infty$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -m\frac{A}{0} + \text{etc.} = \infty$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = m(m+1)\frac{A}{0} + \text{etc.} = \infty$$

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = -m(m+1)(m+2)\frac{A}{0} + \text{etc.} = \infty$$

etc.

Donc si, *pour une valeur particulière de* x, *un des termes du développement de* f(x+i) *est de la forme* Ai^{-m}, *la fonction*

y ainsi que tous les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, *etc. deviendront infinis.*

Nous supposerons, en second lieu, que le développement puisse contenir un terme tel que Hi^m, m étant un nombre positif et fractionnaire, compris entre les deux nombres entiers consécutifs $n-1$ et n; en sorte qu'on ait

$$f(x+i)=A+Bi+Ci^2+\ldots\ldots+Gi^{n-1}+Hi^m+Ki^n+\text{etc.}$$

où $A, B, C\ldots\ldots G, H, K$, etc., représentent encore des fonctions de x ou de a. On déduira de cette forme de développement,

$$\frac{df(x+i)}{di}=B+2Ci+3Di^2+\ldots+(n-1)Gi^{n-2}+mHi^{m-1}+nKi^{n-1}, \text{etc.}$$

$$\frac{d^2f(x+i)}{di^2}=2C+2.3Di+\ldots+(n-1)(n-2)Gi^{n-3}+m(m-1)Hi^{m-2}+n(n-1)Ki^{n-2}+, \text{etc.}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{d^{n-1}f(x+i)}{di^{n-1}}=(n-1)\ldots G+m\ldots Hi^{m-(n-1)}+n\ldots Ki^{n-(n-1)}+\text{etc.}$$

$$\frac{d^nf(x+i)}{di^n}=m\ldots Hi^{m-n}+n\ldots Ki^{n-n}+\text{etc.}$$

$$\frac{d^{n+1}f(x+i)}{di^{n+1}}=m\ldots Hi^{m-(n+1)}+\text{etc.}$$

Si pour trouver ce que deviennent, dans cette seconde hypothèse, les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., on fait encore

$i=0$, on trouvera ces résultats :

$$\frac{dy}{dx}=B$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2C$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=2.3.D$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=1.2\ldots(n-1)G$$

$$\frac{d^ny}{dx^n}=1.2\ldots m\frac{H}{0}+1.2\ldots nK=\infty$$

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=1.2\ldots m.\frac{H}{0}=\infty$$

etc.

Donc, à partir du coefficient différentiel inclusivement dont l'ordre est le nombre entier immédiatement supérieur à m, les coefficiens différentiels sont continuellement infinis; de plus, le développement est régulier depuis le premier terme fx jusqu'au terme Hi^m exclusivement, puisqu'on trouve

$$B=\frac{dy}{dx},\ C=\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2},\ D=\frac{1}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3},\ \text{etc.}$$

Donc si, *pour une valeur particulière de* x, *un des termes du développement de* f (x + i) *est de la forme* Ai^m, m *étant un nombre fractionnaire entre les deux nombres entiers consécutifs* n—1 *et* n, *le coefficient différentiel de l'ordre* n *et les*

suivans seront infinis pour cette valeur de x, et chacun des précédens prendra, dans la même hypothèse, une valeur fixe et déterminée.

Le développement général sera donc en défaut dans ces deux cas.

Réciproquement, si pour une valeur particulière de x, toutes les fonctions fx ou y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., prises dans le développement général, sont infinies, le développement vrai devra contenir un terme de la forme Ai^{-m}; et si, dans ce développement général, le coefficient $\frac{d^ny}{dx^n}$ est le premier qui devienne infini pour une valeur particulière de x, il devra se trouver dans le développement vrai, un terme tel que Ai^m, m étant un nombre compris entre $n-1$ et n.

En effet, dans la première hypothèse, les fonctions fx ou y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., étant ce que deviennent $f(x+i)$, $\frac{df(x+i)}{di}$, $\frac{d^2f(x+i)}{di^2}$, etc., lorsqu'on y fait $i=0$, ne peuvent devenir infinies, à moins que i, ou une puissance de i, ne divise quelques termes de chacun des développemens $f(x+i)$, $\frac{df(x+i)}{di}$, $\frac{d^2f(x+i)}{di^2}$, etc., et, dans la seconde hypothèse, à moins que i ne s'introduise en diviseur, seulement à partir de $\frac{d^nf(x+i)}{di^n}$. Dans ce dernier cas, il est facile de voir que le nombre fractionnaire m doit tomber entre $n-1$ et n : car si m tombait entre $n-2$ et $n-1$, le coefficient $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ serait le premier qui deviendrait infini : si m était entre les deux nombres n et $n+1$,

ce serait à partir seulement de $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ que l'infini s'introduirait dans les coefficiens différentiels. Le nombre fractionnaire n ne peut donc se trouver qu'entre les nombres entiers consécutifs $n-1$ et n.

Il faut bien observer que lorsqu'on veut développer $f(x+i)$ pour $x=a$, on forme d'après la fonction fx, les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., dans lesquels on écrit ensuite a pour x : alors soit que toutes les fonctions fx, $\frac{dy}{dx}$, etc., deviennent infinies, soit que la chose n'arrive qu'à partir, par exemple, de $\frac{d^ny}{dx^n}$, on juge que le développement général est en défaut, c'est-à-dire, que la fonction $f(a+i)$ ne peut se développer suivant des puissances ascendantes entières et positives de i : dans le second cas, on peut déduire de la série de *Taylor*, la partie du développement qui précède le terme de plus petit exposant fractionnaire de i, puisque le développement est régulier dans cette étendue.

Pour trouver la vraie forme du développement dans tous les cas où la série de *Taylor* est en défaut, il faudra faire d'abord dans la fonction $f(x+i)$, x égal à la valeur donnée, et développer ensuite, suivant les puissances croissantes de i, par les règles connues, en ayant égard aux puissances fractionnaires ou négatives de i qui se trouveraient dans la fonction même.

Pour confirmer par quelques exemples ce que nous venons de démontrer, supposons d'abord que l'on ait

$$fx = 2ax - x^2 + a\sqrt{x^2 - a^2},$$

et qu'on demande le développement de $f(x+i)$ pour $x=a$. En formant les coefficiens différentiels suivant les règles générales,

on aura

$$\frac{dy}{dx}=2(a-x)+\frac{ax}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-2+\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}-\frac{ax^2}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et ainsi de suite. En faisant $x=a$, on a

$$fx=a^2,\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{0};\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{0},\ \text{etc.}$$

D'où on conclura que le développement de $f(x+i)$ contiendra nécessairement pour $x=a$, un terme de la forme Gi^m, m étant entre 0 et 1.

En effet, on aura par la substitution de $a+i$ dans l'expression fx,

$$f(a+i)=a^2-\ ^2+a\sqrt{i}\times\sqrt{2a+i}.$$

D'où l'on conclut que le développement suivant les puissances de i, contiendra des termes de la forme $\sqrt{i}$, $i\sqrt{i}$, $i^2\sqrt{i}$, etc.

Soit, en second lieu,

$$fx=\sqrt{x}+(x-a)^2\, l\,(x-a).$$

l indiquant un *logarithme népérien* : on aura ces coefficiens différentiels,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+2(x-a)\,l\,(x-a)+x-a$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}+2\,l\,(x-a)+3$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3}{8x^2\sqrt{x}}+\frac{2}{x-a}.$$

Pour $x=a$, la fonction $\frac{d^3y}{dx^3}$ devient infinie, ainsi que toutes

les suivantes : conséquemment le développement de $f(x+i)$ deviendra fautif pour $x=a$. En substituant $a+i$ pour x, ou trouvera

$$f(a+i)=(a+i)^{\frac{1}{2}}+i^2\, li.$$

Nous avons observé plus haut que lorsqu'une valeur particulière de x, détruit dans fx un radical, en rendant nul son coefficient, ce radical reparaîtra nécessairement dans les fonctions $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., et qu'ainsi la forme générale de $f(x+i)$ ne cessera pas d'être exacte dans ce cas.

Mais lorsque la fonction fx, au lieu d'être donnée d'une manière explicite, n'est déterminée que par une équation où le radical n'entre pas, la détermination de ses coefficiens différentiels est sujette à des difficultés sur lesquelles il est bon de donner quelques explications.

Soit $y=fx$: supposons que pour une valeur donnée de x, il disparaisse dans fx un radical, lequel ne disparaisse pas dans $\frac{dy}{dx}$; il est clair que, pour cette valeur de x, la fonction $\frac{dy}{dx}$ aura un plus grand nombre de valeurs différentes que fx, à raison du radical qui se trouve dans $\frac{dy}{dx}$, et qui a disparu dans fx : d'où il suit que la valeur du $\frac{dy}{dx}$ ne pourra pas être donnée par une simple fonction de x et y, qui ne contiendrait pas explicitement ce radical, comme il arriverait si, dans l'équation $y=fx$, on faisait disparaître ce même radical par l'élévation aux puissances, en sorte qu'on eût

$$F(x,y)=0=u.$$

Or, la différentielle de cette équation est, comme on l'a vu (chap. VI),

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}y'=0=u', \text{ d'où } y'=-\frac{M}{N},$$

en représentant $\frac{du}{dx}$ par M et $\frac{du}{dy}$ par N. Donc cette expression sera en défaut dans le cas où l'on donnerait à x la valeur en question, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que les fonctions $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ seront l'une et l'autre nulles en même tems. Ainsi, dans le cas dont il s'agit, l'expression de y' deviendra zéro divisé par zéro; et réciproquement lorsque cela arrivera, on en conclura que la valeur correspondante de x aura détruit dans fx un radical sans le détruire dans $\frac{dy}{dx}$.

Pour avoir, dans ce cas, la valeur de y', il faudra recourir à la différentielle seconde, puisque la différentielle première est identiquement nulle : or on a trouvé

$$\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{d^2u}{dxdy}y'+\frac{d^2u}{dy^2}y'^2+\frac{du}{dy}.y''=0=u''.$$

Mais à cause de $\frac{du}{dy}=0$, cette équation se réduit à celle-ci :

$$\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{d^2u}{dxdy}y'+\frac{d^2u}{dy^2}y'^2=0,$$

par laquelle on déterminera la valeur de y', qui sera par conséquent double.

Soit, par exemple

$$y=x+(x-a)\sqrt{x-b},$$

on aura

$$y'=1+\sqrt{x-b}+\frac{x-a}{2\sqrt{x-b}}.$$

Et pour $x=a$,

$$y=a,\ y'=1+\sqrt{a-b},$$

où l'on voit que le radical disparaît dans fx, mais non pas dans $\frac{dy}{dx}$ ou y', en sorte que la première fonction est simple, tandis que la seconde est double.

Si on élève la proposée au carré, on aura

$$(y-x)^2-(x-a)^2(x-b)=0=u,$$

et pour l'équation dérivée du premier ordre,

$$2(y-x)(y'-1)-2(x-a)(x-b)+(x-a)^2=0=u',$$

d'où l'on tire

$$y'=1+\frac{2(x-a)(x-b)+(x-a)^2}{2(y-x)}.$$

Pour $x=a$, on a encore $y=a$, ce qui donne $y'=\frac{0}{0}$; on passera donc à la dérivée du second ordre, pour laquelle on trouve

$$2(y-x)y''+2(y'-1)^2-4(x-a)-2(x-b)=0=u''.$$

Ici la supposition de $x=a$, d'où résulte $y=a$, donne

$$(y'-1)^2-(a-b)=0,\ \text{d'où}\ y'=1+\sqrt{a-b},$$

comme plus haut.

Il peut arriver que la même valeur de x qui détruit les termes de u', détruise aussi ceux de u''; il faudra alors passer à u''', qui par la destruction des termes en y'' et y''', deviendra une simple équation en y', mais du troisième degré, et ainsi de suite; et on voit que cela dépend de l'indice du radical qui aura

été détruit dans y, et qui doit être remplacé par le degré de l'équation d'où dépend la valeur de y'.

Supposons, en second lieu, que la même valeur de x qui fait disparaître un radical dans fx, le fasse aussi disparaître dans $\frac{dy}{dx}$, sans néanmoins le détruire dans $\frac{d^2y}{dx^2}$ ou dans y''; alors les valeurs correspondantes de y et y' seront en même nombre; mais celles de y'' seront en nombre plus grand. Si donc on fait évanouir ce radical dans $y=fx$, la valeur de y' qu'on en déduira, se produira sous la forme $=\frac{0}{0}$, et il faudra passer aux équations différentielles d'un ordre supérieur pour avoir la valeur de y''.

Soit, pour en donner un exemple,

$$y=x+(x-a)^2\sqrt{x-b},$$

on aura

$$y'=1+2(x-a)\sqrt{x-b}+\frac{(x-a)^2}{2\sqrt{x-b}}$$

$$y''=2\sqrt{x-b}+\frac{2(x-a)}{\sqrt{x-b}}-\frac{(x-a)^2}{4(x-b)^{\frac{3}{2}}}:$$

faisant $x=a$, on trouve $y=a$, $y'=1$, $y''=2\sqrt{a-b}$. Mais si on réduit l'équation proposée à cette forme rationnelle

$$(y-x)^2-(x-a)^4(x-b)=0=u,$$

on aura

$$2(y-x)(y'-1)-4(x-a)^3(x-b)-(x-a)^4=u'=0,$$

et $u'=0$, en faisant $x=a$ et $y=a$. On passera donc à u'', qui sera

$$(y-x)y''+(y'-1)^2-6(x-a)^2(x-b)-4(x-a)^3=u''=0;$$

Faisant $x = a, y = a$, on aura

$$(y' - 1)^2 = 0, \text{ d'où } y' = 1.$$

Mais pour avoir la valeur de y'', il faudra recourir à u''' et même à u^{IV} : on aura ainsi

$$(y - x)y''' + 3(y' - 1)y'' - 18(x - a)^2 - 12(x - a)(x - b) = u''' = 0,$$

où tout se détruit encore pour $x = a$, $y = a$, $y' = 1$. On trouve ensuite

$$(y - x)y^{\text{IV}} + 4(y' - 1)y''' + 3y''^2 - 48(x - a) - 12(x - b) = u^{\text{IV}} = 0:$$

faisant $x = a$, $y = a$, $y' = 1$, on aura

$$3y''^2 = 12(a - b), \text{ d'où } y'' = 2\sqrt{a - b},$$

comme plus haut.

CHAPITRE X.

Des valeurs des fractions dont le numérateur et le dénominateur s'évanouissent en même tems par une seule valeur de x. *Décomposition des fractions rationnelles.*

CONSIDÉRONS la fraction

$$y=\frac{fx}{Fx},$$

fx et Fx étant des fonctions de x, telles qu'elles deviennent nulles l'une et l'autre pour $x=a$: on demande la valeur de y dans cette supposition pour x. On déduit de là,

$$y.Fx-fx=0=u.$$

Formons la dérivée du premier ordre, et désignons $\frac{d(Fx)}{dx}$ par $F'x$, $\frac{d(fx)}{dx}$ par $f'x$: il viendra

$$y'.Fx+yF'x-f'x=0=u',$$

et à cause de $Fx=0$, pour $x=a$, on aura

$$y=\frac{f'x}{F'x}.$$

S'il arrivait que les fonctions $f'x$, $F'x$ devinssent nulles dans la même supposition, on trouverait par le même prin-

cipe, en remplaçant dans la dernière valeur de y, $f'x$ par $f''x = \frac{d(fx)}{dx^2}$, $F'x$ par $F''x = \frac{d^2(Fx)}{dx^2}$,

$$y = \frac{f''x}{F''x}.$$

Autrement, de

$$yF'x - f'x = o = u'$$

on déduirait

$$y'F'x + yF''x - f''x = o = u'';$$

et à cause de $F'x = o$, pour $x = a$, on aurait, comme ci-dessus, $y = \frac{f''x}{F''x}$. Si, dans la même supposition $x = a$, on avait encore $f''x = o$, $F''x = o$, on emploierait

$$y = \frac{f'''x}{F'''x}$$

où $f'''x$ et $F'''x$ désignent $\frac{d^3(fx)}{dx^3}$, $\frac{d^3(Fx)}{dx^3}$, etc., et ainsi de suite.

Ainsi, *lorsque le numérateur et le dénominateur d'une fonction de* x, *deviennent nuls à-la-fois pour* x = a, *il faut prendre à leur place les coefficiens différentiels successifs du numérateur et du dénominateur, jusqu'à ce qu'on arrive à une fraction entre deux de ces coefficiens de même ordre, qui ait une valeur déterminée pour la même supposition faite sur* x.

Il ne peut pas arriver que ces fractions $\frac{f'x}{F'x}$, $\frac{f''x}{F''x}$, etc., soient indéfiniment nulles pour $x = a$; car à cause de

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{1.2}f''x + \text{etc.}$$

on conclurait

$$f(a+i) = o,$$

i étant quelconque, ce qui est impossible, à moins que fx ne renferme pas x, ce qu'on ne suppose pas.

Il peut néanmoins arriver que ces fonctions deviennent à-la-fois infinies pour $x = a$, ce qui rendrait également indéterminées les fractions $\frac{fx}{Fx}$, $\frac{f'x}{F'x}$, etc.; mais ce cas rentre dans celui que nous avons examiné plus haut, et il en faudra conclure que les développemens de $f(x+i)$, $F(x+i)$ contiendront des puissances de i fractionnaires ou négatives. On substituera donc $a+i$ pour x dans les fonctions numérateur et dénominateur, et l'on résoudra l'une et l'autre en série, suivant les puissances ascendantes de i; on fera ensuite $i = 0$, après avoir divisé le haut et le bas de la fraction par la plus petite des moindres puissances de i, ou, ce qui revient au même, on n'aura d'abord égard qu'au premier terme de chacune des deux séries.

Nous ferons seulement deux exemples, en renvoyant à ceux que nous avons donnés (*Alg.* 1re. sect.). Soit donc d'abord

$$y = \frac{a^x - b^x}{x},$$

qui devient $\frac{0}{0}$ pour $x = 0$: on a $fx = a^x - b^x$, $Fx = x$, $f'x = a^x . la - b^x lb$, $F'x = 1$, et conséquemment

$$y = \frac{a^x . la - b^x . lb}{1} = la - lb,$$

pour $x = 0$. Si pour a^x et b^x on eût écrit les développemens trouvé (chap. IV), on aurait obtenu, après les réductions,

$$y = \frac{x(la - lb) + \frac{x^2}{2}(la - lb)^2 + \text{etc.}}{x},$$

$$=\frac{(la-lb)+\frac{x}{2}(la-lb)^2+\text{etc.}}{1}=la-lb,$$

pour $x=0$.

Supposons, en second lieu,

$$y=(1-x)\tang\frac{\pi x}{2},$$

π étant la demi-circonférence : pour $x=1$, on a $1-x=0$ et $\tang\frac{\pi}{2}x=\tang\frac{\pi}{2}=\infty$: mais à cause de.........

$\tang\frac{\pi x}{2}=\frac{1}{\cot\frac{\pi x}{2}}$, on peut mettre y sous la forme

$$y=\frac{1-x}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\frac{0}{0},$$

pour $x=1$. Si l'on forme $f'x$, $F'x$, on trouvera

$$f'x=-1,\quad F'x=-\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)},$$

et pour $x=1$, $F'x=-\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}=-\frac{\pi}{2}$: d'où l'on tire cette valeur vraie de la fraction

$$y=-\frac{1}{-\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

On a vu (*Alg.*, 2e. sect.) que la recherche du terme général d'une suite récurrente, ne présentait plus de difficultés,

lorsque la fraction rationnelle génératrice était décomposée en fractions simples ; cette décomposition étant aussi d'un usage très-fréquent dans le calcul intégral, il ne sera pas inutile de la traiter ici comme application du calcul différentiel.

Avant d'opérer cette décomposition, nous rappellerons que le numérateur N de la fraction rationnelle, c'est-à-dire, sans radicaux, peut toujours être ramené par la division à un degré moindre, au moins, d'une unité que le dénominateur ; et nous supposerons qu'on ait, au moyen des méthodes connues, décomposé le dénominateur D dans ses facteurs simples, ou qu'on ait résolu l'équation $D=0$.

Soit donc

$$\frac{N}{D}=\frac{a+a'x+a''x^2+\ldots+a^{(n-1)}x^{n-1}}{(x-\alpha)(x-\alpha')\ldots\ldots(x-\alpha^{(n-1)})},$$

$\alpha, \alpha' \ldots \alpha^{(n-1)}$ étant des racines réelles ou imaginaires. On pourra poser

$$\frac{N}{D}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{A'}{x-\alpha'}+\frac{A''}{x-\alpha''}+\text{etc.},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{N}{D}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{P}{S},$$

$\frac{P}{S}$ étant la somme de toutes les fractions simples, à l'exception de celle qu'on considère, et A un coefficient numérique à évaluer. De l'identité précédente résulte celle-ci :

$$A=\frac{N-P(x-\alpha)}{S}=\frac{[N-P(x-\alpha)](x-\alpha)}{D}.$$

Or, pour $x=\alpha$, on trouve $A=\frac{0}{0}$; il s'agit donc d'assigner

la valeur vraie de cette fraction. A cet effet, d'après la règle donnée au commencement de ce chapitre, on différentiera numérateur et dénominateur, en observant que N, P et D sont fonctions de x, et on obtiendra

$$A=\frac{\left(\frac{dN}{dx}-\frac{dP}{dx}(x-\alpha)-P\right)(x-\alpha)+N-P(x-\alpha)}{\frac{dD}{dx}}:$$

dans l'hypothèse $x=\alpha$, la valeur de A devient

$$A=\frac{N}{\frac{dD}{dx}}=\frac{(N)}{(D')}$$

en désignant par (N) et (D') ce que deviennent N et $\frac{dD}{dx}$, lorsqu'on remplace x par α. Mais de

$$D=S(x-\alpha),$$

on tire par la différentiation

$$\frac{dD}{dx}=S+(x-\alpha)\frac{dS}{dx};$$

et pour $x=\alpha$,

$$(D')=(S),$$

(S) étant ce que devient S dans cette hypothèse. On a donc ces déterminations

$$A=\frac{(N)}{(S)}=\frac{(N)}{(D')}.$$

En faisant $x=\alpha$ dans l'identité ci-dessus $A=\frac{N-P(x-\alpha)}{S}$, on trouverait en effet $A=\frac{(N)}{(S)}$.

Ainsi, pour évaluer les numérateurs A, A', etc. des fractions partielles qui répondent aux facteurs simples $x-\alpha$, $x-\alpha'$, etc., du dénominateur, il ne faut que substituer successivement les racines α, α', α'', etc. pour x dans N et dans $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x}$.

Ainsi, pour la fraction $\frac{x}{x^3-1}$, dont le dénominateur est le produit $(x-1)\left(x+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)$, on trouvera

$$A=\frac{\alpha}{3\alpha^2}=\frac{1}{3}$$

$$A'=\frac{\alpha'}{3\alpha'^2}=\frac{1}{3\alpha'}=\frac{1}{3\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)}.$$

$$A''=\frac{\alpha''}{3\alpha''^2}=\frac{1}{3\alpha''}=\frac{1}{3\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)}.$$

Supposons, en second lieu, $D=(x-\beta)^n$; c'est-à-dire,

$$\frac{N}{D}=\frac{a+a'x+a''x^2+\ldots+a^{(n-1)}x^{n-1}}{(x-\beta)^n},$$

si l'on fait $x-\beta=z$, d'où $x=\beta+z$, on aura, après la substitution, cette décomposition de la fraction rationnelle

$$\frac{N}{D}=\frac{a+a'\beta+a''\beta^2\ldots+a^{(n-1)}\beta^{n-1}}{z^n}$$
$$+\frac{a'+2a''\beta+3a'''\beta^2+\ldots+(n-1)\,a^{(n-1)}\,\beta^{n-2}}{z^{n-1}}$$
$$+\frac{a''+3a'''\beta+\ldots\frac{(n-1)\,(n-2)}{1.2}\,a^{(n-1)}\,\beta^{n-3}}{z^{n-2}}+\ldots+\frac{a^{(n-1)}}{z}.$$

De sorte qu'on pourra supposer

$$\frac{N}{D}=\frac{B}{(x-\beta)^n}+\frac{B'}{(x-\beta)^{n-1}}+\frac{B''}{(x-\beta)^{n-2}}+\ldots\frac{B^{(n-1)}}{x-\beta}.$$

B, B', B'', etc., devant être indépendans de x.

Dans le cas où le dénominateur D renfermerait outre le facteur $(x-\beta)^n$, d'autres facteurs inégaux, on aurait, en représentant par $\frac{P}{S}$, la somme des fractions simples dues à ces facteurs,

$$\frac{N}{D}=\frac{B}{(x-\beta)^n}+\frac{B'}{(x-\beta)^{n-1}}+\ldots+\frac{B^{(n-1)}}{x-\beta}+\frac{P}{S}.$$

On déduit de là, en multipliant de part et d'autre par $(x-\beta)^n$, et observant que $D=(x-\beta)^n S$,

$$\frac{N}{S}=B+B'(x-\beta)+B''(x-\beta)^2+\ldots+\frac{P(x-\beta)^n}{S}.$$

Pour $x=\beta$, cette identité devient

$$B=\frac{(N)}{(S)}.$$

Si on différentie les deux membres de l'identité précédente, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{N}{S}\right)}{\mathrm{d}x}=B'+2B''(x-\beta)+3B'''(x-\beta)^2+\text{etc.}$$

et pour $x=\beta$, on a cette détermination

$$B'=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{N}{S}\right)}{dx}.$$

Une seconde différentiation donne

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{N}{S}\right)}{\mathrm{d}x^2} = 2B'' + 2.3B'''(x-\beta) + \text{etc.}$$

Et pour $x=\beta$,

$$B'' = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{N}{S}\right)}{\mathrm{d}x^2}.$$

On aurait de même

$$B''' = \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{\mathrm{d}^3\left(\frac{N}{S}\right)}{\mathrm{d}x^3}$$

$$B^{\text{IV}} = \frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{\mathrm{d}^4\left(\frac{N}{S}\right)}{\mathrm{d}x^4},$$

etc.

A la $(n-1)^{me}$ différentiation, le facteur $x-\beta$ ne se trouve plus que dans $\frac{\mathrm{d}^{n-1}\left(\frac{P(x-\beta)^n}{S}\right)}{\mathrm{d}x^{n-1}}$; de sorte qu'en faisant $x=\beta$, il reste

$$B^{(n-1)} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}.\ \frac{\mathrm{d}^{n-1}\left(\frac{N}{S}\right)}{\mathrm{d}x^{n-1}}$$

Les formules précédentes supposent qu'on connaisse le produit S des facteurs autres que $(x-\beta)^n$: on peut encore l'obtenir par la différentiation. En effet, on a

$$S = \frac{D}{(x-\beta)^n},\ \text{d'où}\quad D = S(x-\beta)^n.$$

Donc, après n différentiations, et dans l'hypothèse $x = \beta$, on trouvera

$$\frac{d^n D}{dx^n} = 1.2.3\ldots n S,$$

et conséquemment

$$S = \frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{d^n D}{dx^n}.$$

Comme il faut connaître aussi dS, nous joindrons aux formules précédentes celle-ci

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)}\cdot\frac{d^{n+1}D}{dx^{n+1}}.$$

Pour la démontrer, formons les différentielles successives

$$\begin{aligned}
d\,(yz) &= y\,dz + z\,dy\\
d^2(yz) &= y\,d^2z + 2\,dy\,dz + z\,d^2y\\
d^3(yz) &= y\,d^3z + 3\,dy\,d^2z + 3\,d^2y\,dz + z\,d^3y\\
d^4(yz) &= y\,d^4z + 4\,dy\,d^3z + 6\,d^2y\,d^2z + 4\,d^3y\,dz + z\,d^4y;\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

où y et z sont des fonctions de x : la loi de ces résultats ayant été vérifiée jusqu'à

$$d^n(yz) = y\,d^nz + A\,dy\,d^{n-1}z + B\,d^2y\,d^{n-2}z + C\,d^3y\,d^{n-3}z + \text{etc.},$$

aura lieu indéfiniment, puisqu'on a

$$d^{n+1}(yz) = y\,d^{n+1}z + \left.\begin{matrix}A\\+1\end{matrix}\right\}dy\,d^nz + \left.\begin{matrix}B\\+A\end{matrix}\right\}d^2y\,d^{n-1}z + \left.\begin{matrix}C\\+B\end{matrix}\right\}d^3y\,d^{n-2}z + \text{etc.}$$

de sorte que les coefficiens A, B, C, etc. sont ceux du binome $(dz + dy)^n$, en appliquant à la caractéristique d, les exposans de dz et de dy, et observant que $d^0y = y$, $d^0z = z$. Ainsi ayant $D = S\,(x - \beta)^n$, on posera $y = S$, $z = (x - \beta)^n$,

et la dernière formule appliquée à ces facteurs, donnera, pour $x=\beta$, et en observant qu'il suffit de calculer le terme... $(A+1)\,dy\,d^n z$,

$$d^{n+1}D = 1.2.3\ldots n\,(n+1)\,dx^n dS\,;$$

d'où l'on tire la formule annoncée

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{1.2\ldots n\,(n+1)}\;\frac{d^{n+1}D}{dx^{n+1}}.$$

Cependant, lors même que le dénominateur D de la fraction, contient des facteurs imaginaires, on peut encore trouver des fractions partielles réelles. En effet, représentant l'un de ces facteurs par $x+\alpha+\beta\sqrt{-1}$, l'autre sera $x+\alpha-\beta\sqrt{-1}$, (*Alg.*, 2e. sect.) et leur produit $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$ sera un facteur réel de D; d'ailleurs les numérateurs A et A' des fractions partielles

$$\frac{A}{x+\alpha+\beta\sqrt{-1}} + \frac{A'}{x+\alpha-\beta\sqrt{-1}},$$

étant déterminés d'après l'une ou l'autre des règles.......
$A=\frac{(N)}{(D')}=\frac{(N)}{(S)}$, seront de la forme

$$A=\frac{M+N\sqrt{-1}}{M'+N'\sqrt{-1}},\quad A'=\frac{M-N\sqrt{-1}}{M'-N'\sqrt{-1}},$$

on aura donc

$$A=P+Q\sqrt{-1},\quad A'=P-Q\sqrt{-1},$$

et réduisant au même dénominateur ces deux fractions partielles, la fraction résultante sera de la forme

$$\frac{G+Kx}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} \text{ ou } \frac{G+Kx}{(x+\alpha)^2+\beta^2},$$

G et K ne renfermant pas d'imaginaires. On peut encore au lieu du dénominateur $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$ prendre celui-ci $x^2-2\rho x\cos\varphi+\rho\rho$, ρ et φ ayant avec les coefficiens de

l'équation

$$x^2 - px + q = 0,$$

qui a donné les racines imaginaires $x = -\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, les relations $\rho = \sqrt{q}$, $\cos\varphi = \frac{p}{2\sqrt{q}}$ (*), sous lesquelles les facteurs simples de ce polynome du second degré, sont essentiellement imaginaires. On aura donc en place de..... $\frac{G + Kx}{(x+\alpha)^2 + \beta^2}$ la fraction $\frac{G + Kx}{x^2 - 2\rho x \cos\varphi + \rho\rho}$.

Posons

$$S = \frac{D}{x^2 - 2\rho x \cos\varphi + \rho\rho}, \text{ d'où } D = S(x^2 - 2\rho x \cos\varphi + \rho\rho),$$

et soit

$$\frac{N}{D} = \frac{G + Kx}{x^2 - 2\rho x \cos\varphi + \rho\rho} + \frac{P}{S},$$

d'où

$$\frac{P}{S} = \frac{N}{D} - \frac{G + Kx}{x^2 - 2\rho x\cos\varphi + \rho\rho} = \frac{N(x^2 - 2\rho x\cos\varphi + \rho\rho) - D(G + Kx)}{D(x^2 - 2\rho x\cos\varphi + \rho\rho)},$$

si l'on met pour D sa valeur, on trouvera

$$P = \frac{N - S(G + Kx)}{x^2 - 2\rho x\cos\varphi + \rho\rho}.$$

Or, P étant une fonction algébrique rationnelle et entière, il

---

(*) Les racines de l'équation $x^2 - px + q = 0$, sont $x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. or $q = \rho^2$, $\frac{p^2}{4} = \rho^2\cos^2\varphi$; donc

$$x = \rho\cos\varphi \pm \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2} = \rho\left\{\cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1}\right\} = \rho\left\{\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1}\right\},$$

racines imaginaires.

faut que $x^2 - 2\rho x \cos\varphi + \rho\rho$ soit facteur dans le numérateur qui doit ainsi devenir nul pour

$$x = \rho \left\{ \cos\varphi \pm \sin\varphi \sqrt{-1} \right\}.$$

Par cette substitution, N deviendra

$$(N) = P \pm Q\sqrt{-1},$$

et S deviendra

$$(S) = P' \pm Q'\sqrt{-1};$$

or de

$$N - S(G + Kx) = 0,$$

on déduit

$$\frac{(N)}{(S)} \text{ ou } \frac{P \pm Q\sqrt{-1}}{P' \pm Q'\sqrt{-1}} = G + K\left\{\rho\,(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})\right\},$$

on tire de là

$$\frac{PP' + QQ' \pm (P'Q - PQ')\sqrt{-1}}{P'^2 + Q'^2} = G + K\rho\cos\varphi \pm \rho K \sin\varphi\sqrt{-1},$$

égalité qui se partage dans les deux suivantes

$$\frac{PP' + QQ'}{P'^2 + Q'^2} = G + K\rho\cos\varphi, \quad \frac{P'Q - PQ'}{P'^2 + Q'^2} = \rho K \sin\varphi:$$

de la dernière, on tire

$$K = \frac{P'Q - PQ'}{(P'^2 + Q'^2)\rho\sin\varphi},$$

et de la première

$$G = \frac{PP' + QQ' - K\rho\cos\varphi\,(P'^2 + Q'^2)}{P'^2 + Q'^2},$$

et à cause de

$$K\rho(P'^2 + Q'^2) = (P'Q - PQ'^2.\frac{\cot\varphi}{\cos\varphi},$$

on a

$$G = \frac{PP' + QQ' - (P'Q - PQ')\cot\varphi}{P'^2 + Q'^2}.$$

Dans le cas de $\cos\varphi = 0$, d'où $\sin\varphi = 1$, le facteur double devient $x^2 + \rho^2$, et alors, à cause de $\cot\varphi = 0$,

$$G = \frac{PP' + QQ'}{P'^2 + Q'^2}; \quad K = \frac{P'Q - PQ'}{\rho(P'^2 + Q'^2)}.$$

On voit donc que les numérateurs G et K ont, comme ceux des fractions partielles qui résultent des facteurs simples, l'avantage de pouvoir être calculés séparément.

Faisons une application de ce qui précède, à la décomposition de la fraction

$$\frac{1}{x^8 + x^7 - x^4 - x^3},$$

dont le dénominateur $= (x - 1)(x + 1)^2 x^3 (x^2 + 1)$: on posera donc

$$\frac{1}{x^8 + x^7 - x^4 - x^3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{B'}{x + 1} + \frac{C}{x^3} + \frac{C'}{x^2} + \frac{C''}{x} + \frac{G + Kx}{x^2 + 1}.$$

On aura d'abord

$$A = \frac{(N)}{(D')} = \frac{1}{8 + 7 - 4 - 3} = \tfrac{1}{8}$$

pour $x = 1$. Pour le facteur $(x + 1)^2$, on a (pag. 137)

$$S = \frac{d^2D}{1.2dx^2} = \frac{56x^6 + 42x^5 - 12x^2 - 6x}{1.2} = 4,$$

pour $x = -1$, et, dans la même hypothèse,

$$B = \frac{(N)}{(S)} = \tfrac{1}{4},$$

mais

$$B' = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{N}{S}\right)}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{S^2}.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x},$$

et (pag. 137)

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^3 D}{1.2.3\,\mathrm{d}x^3} = 56x^5 + 35x^4 - 4x - 1,$$

donc, pour $x = -1$

$$B' = -\frac{56x^5 + 35x^4 - 4x - 1}{(28x^6 + 21x^5 - 6x^2 - 3x)^2} = \frac{9}{8}.$$

Viennent ensuite les indéterminées C, C', C''. On a, dans ce cas,

$$S = x^5 + x^4 - x - 1 = -1$$

pour $x = 0$; donc

$$C = \frac{(N)}{(S)} = -1,$$

$$C' = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{N}{S}\right)}{\mathrm{d}x} = -\frac{5x^4 + 4x^3 - 1}{(x^5 + x^4 - x - 1)^2} = +1,$$

$$C'' = \frac{1}{1.2.\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}^2\left\{\frac{1}{(x^5 + x^4 - x - 1)^2}\right\} = -1.$$

Il reste donc à évaluer les indéterminées G et K de la fraction $\frac{G + Kx}{x^2 + 1}$: alors $x = \pm\sqrt{-1}$; $\cos\varphi = 0$, $\rho = 1$,

$$S = x^6 + x^5 - x^4 - x^3 = -2 \pm 2\sqrt{-1} -,$$

donc $P' = -2$, $Q' = 2$, et, à cause de $N = 1$, on a $P = 1$, $Q = 0$, et conséquemment

$$K = \frac{P'Q - PQ'}{P'^2 + Q'^2} = -\frac{1}{4},$$

$$G = \frac{PP' + QQ'}{P'^2 + Q'^2} = -\frac{1}{4}.$$

De sorte que

$$\frac{1}{x^8 + x^7 - x^4 - x^3} = \frac{1}{8(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{9}{8(x+1)}$$
$$-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1+x}{4(x^2+1)}.$$

Pour completter la doctrine de la décomposition des fractions rationnelles, nous avons encore à considérer celles dont le dénominateur est le produit de plusieurs facteurs imaginaires égaux.

Soit donc la fraction

$$\frac{N}{D} = \frac{N}{S(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^q}.$$

On posera

$$\frac{N}{D} = \frac{G + Kx}{(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^q} + \frac{G' + K'x}{(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^{q-1}} + \frac{G'' + K''x}{(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^{q-2}}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{G^{(q-1)} + K^{(q-1)}x}{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2} + \frac{P}{S},$$

$\frac{P}{S}$ représentant la somme des fractions partielles dues aux autres facteurs compris dans D, et dont le produit est S.

A l'effet d'évaluer les coefficiens G, K; G', K'; etc., on multipliera les deux membres de cette identité par ..... $(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^q$, ce qui donnera la suivante

$$\frac{N}{S} = G + Kx + (G' + K'x)\{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}$$
$$+ (G'' + K''x)\{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}^2$$
$$+ (G''' + K'''x)\{(x-\alpha)^2 + \beta^2\}^3$$
$$+ \frac{P(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^q}{S} \ldots . (M),$$

laquelle devant avoir lieu pour toutes les valeurs de x, donne pour $x = \alpha \pm \beta \sqrt{-1}$,

$$\frac{(N)}{(S)} = G + K \{ \alpha \pm \beta \sqrt{-1} \};$$

mais, par le fait de cette substitution, $\frac{(N)}{(S)}$ prend la forme $m \pm n \sqrt{-1}$; donc

$$m \pm n \sqrt{-1} = G + K (\alpha \pm \beta \sqrt{-1}).$$

d'où on déduira les valeurs des indéterminées G et K.

Si on différentie l'identité (M), et que, dans le résultat, on fasse $x = \alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, on trouvera

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{N}{S}\right)}{\mathrm{d}x} = K \pm \{ G' + K' (\alpha \pm \beta \sqrt{-1}) \} 2\beta \sqrt{-1};$$

or, le résultat de la substitution des deux valeurs de x dans $\frac{1}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}\left(\frac{N}{S}\right)$ étant de la forme $m' \pm n' \sqrt{-1}$, on a les deux égalités

$$m' \pm n' \sqrt{-1} = K \pm \{ G' + K' (\alpha \pm \beta \sqrt{-1}) \} 2\beta \sqrt{-1},$$

qui serviront à déterminer les deux autres coefficiens G', K', et ainsi des suivans.

CHAPITRE XI.

Des limites du développement de f (x + i) *et de* fx, *lorsqu'on n'a égard qu'à un nombre déterminé des premiers termes.*

TOUTE fonction $f(x+i)$ se développe dans la série connue qui va à l'infini, à moins que les fonctions dérivées de fx ne deviennent nulles, ce qui a lieu lorsque fx est une fonction rationnelle et entière de x. Tant que ce développement ne sert qu'à la génération de fonctions dérivées, il est indifférent que la série aille à l'infini ou non : on peut encore dire la même chose lorsqu'on ne considère le développement que comme une simple transformation analytique de la fonction : mais si on veut l'employer pour avoir la valeur de la fonction dans les cas particuliers, comme offrant une expression d'une forme plus simple, à raison de la quantité i qui se trouve dégagée de dessous la fonction, alors, ne pouvant tenir compte que d'un certain nombre plus ou moins grand de termes, il est important d'avoir un moyen d'évaluer le reste de la série qu'on néglige, ou du moins de trouver les limites de l'erreur qu'on commet en négligeant ce reste. La détermination de ces limites, ajoute M. *Lagrange*, est sur-tout d'une grande importance dans l'application de la théorie des fonctions à l'analyse des courbes et à la mécanique, pour pouvoir donner à cette application la rigueur de l'ancienne géométrie.

Si l'on part de ce développement

$$f(x+i) = fx + if'x + iI,$$

dans lequel

$$iI = i\left(\frac{i}{2}f''x + \frac{i^2}{1.2.3}f'''x + \text{etc.}\right),$$

et qu'on fasse $x + i = z$, d'où $i = z - x$, on aura

$$\frac{fz - fx}{z - x} = p,$$

p représentant le reste du développement. On tire de là

$$fz = fx + p\,(z - x)\ldots\ldots(1):$$

cette équation devant être identique, quelles que soient les valeurs de x et de z, on pourra supposer que z restant invariable, x devienne $x + h$; alors fx deviendra .... $fx + hf'x + hH$, $z - x$ se changera en $z - x - h$, et p en $p + hp' + hP$; en observant que dans p on ne fait varier que x: d'ailleurs H et P deviennent nuls lorsqu'on fait $h = 0$. On a pour résultat de ces substitutions dans (1)

$$fz = fx + hf'x + hH + (p + hp' + hP)\,(z - x - h),$$

et si de cette dernière égalité on retranche (1), il vient

$$hf'x + hH + hp'(z - x) - hp - p'h^2 + hP(z - x) - h^2P = 0,$$

divisant par h, puis faisant $h = 0$, on trouve

$$f'x + p'\,(z - x) - p = 0\ldots\ldots(2).$$

Cette équation devant encore être identique, quelle que soit la valeur de x, parce que z est invariable, on pourra y substituer de nouveau $x + h$ à x, et alors $f'x$ deviendra $f'x + hf''x + hH'$, p' deviendra $p' + hp'' + hP'$, et par ces substitutions et celles déja connues pour $z - x$ et p,

l'équation (2), après la division par h, se partagera encore en deux autres, dont l'une sera

$$f''x + p''(z-x) - 2p' = 0 \ldots (3).$$

On trouvera successivement

$$f'''x + p'''(z-x) - 3p'' = 0 \ldots (4),$$
$$f^{\text{IV}}x + p^{\text{IV}}(z-x) - 4p''' = 0 \ldots (5),$$
etc.

résultats dont la loi est facile à saisir. De cette suite d'équations (2), (3), etc., on tire

$$p = f'x + p'(z-x),$$
$$p' = \frac{f''x}{2} + \frac{p''}{2}(z-x),$$
$$p'' = \frac{f'''x}{3} + \frac{p'''}{3}(z-x),$$
$$p''' = \frac{f^{\text{IV}}x}{4} + \frac{p^{\text{IV}}}{4}(z-x).$$
etc.

Ces valeurs substituées successivement dans (1), donnent cette suite de développemens

$$\left.\begin{aligned} fz &= fx + (z-x)f'x + (z-x)^2 p' \\ fz &= fx + (z-x)f'x + \frac{(z-x)^2}{1.2}f''x + \frac{(z-x)^3}{1.2}p'' \\ fz &= fx + (z-x)f'x + \frac{(z-x)^2}{1.2}f''x + \frac{(z-x)}{1.2.3}f'''x \\ &\quad + \frac{(z-x)^4}{1.2.3}p''' \end{aligned}\right\} (M),$$

etc.

lesquels, par le changement de $z-x$ en i, deviennent

$$f(x+i)=fx+if'x+i^2p'$$

$$=fx+if'x+\frac{i^2}{1.2}f''x+\frac{i^3}{1.2}p'',$$

etc.

en sorte que si l'on s'arrête au terme $\frac{i^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}x$, le reste de la série sera exactement représenté par $\frac{i^{n+1}}{1.2\ldots n}p^{(n)}$.

Prenons pour exemple

$$fx=\frac{x^2-a^2}{x}=x-a^2x^{-1},$$

on aura

$$f'x=1+a^2x^{-2};\ f''x=-2a^2x^{-3},\ \text{etc.},$$

et si l'on veut arrêter le développement à $f''x$, on trouvera

$$f(x+i)=fz=\frac{x^2-a^2}{x}+\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)i-\frac{a^2}{x^3}i^2+\frac{i^3}{2}p'',$$

mais

$$p=\frac{fz-fx}{z-x}=\frac{\frac{(x+i)^2-a^2}{x+i}-\frac{x^2-a^2}{x}}{z-x}=1+\frac{a^2}{zx},$$

ce qui donne, en ne différentiant que par rapport à x,

$$p'=-\frac{a^2}{zx^2}\ \text{et}\ p''=\frac{2a^2}{zx^3}=\frac{2a^2}{(x+i)x^3},$$

on a donc

$$f(x+i)=\frac{x^2-a^2}{x}+\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)i-\frac{a^2}{x^3}i^2+\frac{a^2}{(x+i)x^3}i^3$$

$$=x+i-\frac{a^2}{x+i}.$$

Soit encore la fonction radicale $\sqrt{x}$: on aura

$$p = \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{z - x} = \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{x}},$$

et conséquemment

$$p' = \frac{-1}{2[\sqrt{z} + \sqrt{x}]^2\sqrt{x}}$$

$$p'' = \frac{\sqrt{z} + 3\sqrt{x}}{4[\sqrt{z} + \sqrt{x}]^3 x\sqrt{x}},$$

etc.,

on tire de là ces valeurs des termes sommatoires

$$p(z-x) = \frac{z-x}{\sqrt{z}+\sqrt{x}} = \frac{i}{\sqrt{x+i}+\sqrt{x}}$$

$$p'(z-x)^2 = \frac{-(z-x)^2}{2[\sqrt{z}+\sqrt{x}]^2\sqrt{x}} = -\frac{i^2}{2[\sqrt{x+i}+\sqrt{x}]^2}$$

$$\frac{p''}{2}(z-x)^3 = \frac{(z-x)^3[\sqrt{z}+3\sqrt{x}]}{8[\sqrt{z}+\sqrt{x}]^3 x\sqrt{x}} = \frac{i^3[\sqrt{x+i}+3\sqrt{x}]}{8[\sqrt{x+i}+\sqrt{x}]^3 x\sqrt{x}}.$$

Tels sont en effet les résultats obtenus par l'algèbre ordinaire, page 10, de la *Théorie des fonctions analytiques*. Mais nous observerons que très-souvent on trouve par cette analyse le reste de la série, égal à la fonction même $f(x+i)$, moins tous les termes déja employés, ce qui ne fait rien connaître; c'est ce dont on s'assurera, en l'appliquant à la fonction $(x+i)^m$. Ainsi nous donnerons à la suite une autre méthode qui s'étend à toutes les fonctions.

Si l'on reprend l'équation identique

$$fz = fx + p(z-x),$$

et qu'on suppose que ce soit z et non plus x qui varie, on

trouvera, par une analyse semblable à la précédente, et en notant par $'p$, $''p$, $'''p$, etc., les coefficiens des différentielles de p, prises par rapport à z,

$$f'z = 'p\,(z-x) + p$$
$$f''z = ''p\,(z-x) + 2'p$$
$$f'''z = '''p\,(z-x) + 3''p,$$
etc.

Donc

$$p = f'z - 'p\,(z-x)$$
$$'p = \frac{f''z}{2} - \frac{''p}{2}(z-x)$$
$$''p = \frac{f'''z}{3} - \frac{'''p}{3}(z-x),$$
etc.

Substituant successivement dans l'identité

$$fz = fx + p\,(z-x),$$

il vient

$$fz = fx + (z-x)\,f'z - (z-x)^2\,'p$$
$$fz = fx + (z-x)\,f'z - (z-x)^2\,\frac{f''z}{2} + (z-x)^3\,\frac{''p}{2}$$
$$fz = fx + (z-x)\,f'z - (z-x)^2\,\frac{f''z}{2} + (z-x)^3\,\frac{f'''z}{1.2.3} - (z-x)^4\,\frac{'''p}{1.2.3},$$
etc.

ce qui donne la formule

$$fz = f(z-i) + if'z - \frac{i^2}{1.2}f''z + \frac{i^3}{1.2.3}f'''z - \text{etc.},$$

et pour $i = z$

$$fz = fo + zf'z - \frac{z^2}{1.2} f''z + \frac{z^3}{1.2.3} f'''z - \text{etc.},$$

d'où on déduit encore

$$fo = fz - zf'z + \frac{z^2}{1.2} f''z - \frac{z^3}{1.2.3} f'''z + \text{etc.},$$

formule qui revient à celle-ci

$$y^o = y - xy' + \frac{x^2}{1.2} y'' - \frac{x^3}{1.2.3} y''' + \text{etc.},$$

trouvée (pag. 105) et qui sert à remonter de la dérivée du premier ordre à la primitive.

L'analyse suivante, tirée du Calcul des fonctions par M. *Lagrange*, donne non la valeur exacte du reste du développement, mais les limites de l'erreur qu'on commet en négligeant ce reste.

Soit

$$f(x+i) = fx + i(f'x + V),$$

V étant une fonction de x et de i, telle qu'elle devient nulle pour $i = 0$. Si l'on considère V comme l'ordonnée d'une courbe dont i serait l'abscisse, il est clair que i augmentant par des degrés très-rapprochés depuis $i = 0$, l'ordonnée V croîtra soit sous le signe *plus*, soit sous le signe *moins*, par des degrés très-rapprochés, jusqu'à un certain point, après quoi elle pourra diminuer; qu'ainsi on pourra toujours donner à i une valeur telle que celle de la fonction ou de l'ordonnée V qui lui correspond, soit moindre qu'une quantité donnée, et que pour des valeurs moindres de i, la valeur de V soit encore moindre.

Soit D une quantité prise aussi petite qu'on voudra; on pourra donc, d'après ce qui vient d'être dit, donner à i une

valeur assez petite pour que la valeur de V soit renfermée entre les limites D et $-D$; donc la quantité $f(x+i)-fx$ sera comprise entre celles-ci $i(f'x \pm D)$.

Comme cette conclusion a lieu, quelle que soit la valeur de x, pourvu que $f'x$ ne soit pas infinie, parce qu'alors les coefficiens différentiels suivans deviendraient pareillement infinis, ainsi que V, elle subsistera aussi en mettant successivement $x+i$, $x+2i$, $x+3i \ldots\ldots x+(n-1)i$ au lieu de x; de sorte qu'on pourra toujours prendre l'accroissement i positif et assez petit pour que chacune de ces différences

$$\left.\begin{array}{l|c|l} f(x+i)-fx & & i[f'x \pm D] \\ f(x+2i)-f(x+i) & \text{tombe} & i[f'(x+i) \pm D] \\ f(x+3i)-f(x+2i) & \text{entre} & i[f'(x+2i) \pm D] \\ \quad\cdot & \text{les} & \quad\cdot \\ \quad\cdot & \text{limites} & \quad\cdot \\ \quad\cdot & & \quad\cdot \\ f(x+ni)-f(x+(n-1)i) & & i[f'(x+(n-1)i) \pm D] \end{array}\right\} (A)$$

En prenant pour D la même quantité dans chacune de ces limites, ce qui est permis, pourvu qu'aucune des dérivées $f'x, f'(x+i), f'(x+2i), \ldots\ldots f'(x+(n-1)i)$, ne soit infinie, ou, en d'autres termes, pourvu que $f'x$ ne soit jamais infinie dans l'étendue de x à $x+(n-1)i$ inclusivement.

Donc, si ces limites sont toutes de même signe, c'est-à-dire, toutes positives ou toutes négatives, la somme des différences (A), qui est $f(x+ni)-fx$, aura pour limites la somme des limites, c'est-à-dire,

$$if'x+if'(x+i)+if'(x+2i)+\ldots\ldots+if'(x+(n-1)i) \pm niD.$$

Si donc on prend

$$D < \frac{f'x+f'(x+i)+f'(x+2i)+\ldots\ldots+f'(x+(n-1)i)}{n},$$

abstraction faite du signe de la somme des fonctions dérivées, la quantité $f(x+ni)-fx$ sera nécessairement renfermée entre zéro et la somme

$$2i\{f'x+f'(x+i)+f'(x+2i)+\ldots+f'(x+(n-1)i)\}.$$

Donc, si P est la plus grande valeur positive ou négative des quantités $f'x$, $f'(x+i)\ldots\ldots f'(x+(n-1)i)$, la quantité $f(x+ni)-fx$ sera, à plus forte raison, renfermée entre zéro et $2niP$.

Or, comme en prenant i aussi petit qu'on voudra, on peut, en même tems, prendre n aussi grand qu'on voudra, on pourra supposer le produit in égal à une quantité quelconque z, positive ou négative, puisque l'accroissement i peut être pris positivement ou négativement, toujours sous la condition que $f'x$, $f'(x+i)$, etc., conserve le même signe.

La quantité $f(x+ni)-fx$ deviendra ainsi $f(x+z)-fx$, et pourra représenter une fonction quelconque de z, qui s'évanouit lorsque $z=0$, la quantité x pouvant être regardée comme une constante arbitraire; de même la fonction dérivée $f'(x+ni)$ deviendra $f'(x+z)$ et représentera le coefficient différentiel de $f(x+z)$ qui est le même, soit qu'on différentie par rapport à z ou par rapport à x : les deux limites seront zéro et $2zP$, et $f(x+z)-fx$ aura même signe que $2zP$.

On peut donc conclure, en général, *que si* $f'(x+z)$ *a constamment des valeurs finies et de même signe, depuis* $z=0$ *jusqu'à* z, *et que* P *soit la plus grande de ces valeurs, abstraction faite du signe, la fonction primitive* $f(x+z)-fx$, *prise de manière qu'elle s'évanouisse pour* $z=0$, *sera renfermée entre zéro et* $2zP$; *par conséquent, elle aura toujours aussi des valeurs finies et de même signe que la fonction dérivée, si* z *est positive, ou de signes différens si* z *est négative.* On

se rappellera que le signe de x dépend de celui de i, et que celui de P dépend du signe, toujours le même, des fonctions dérivées.

Voici maintenant comment ce principe s'applique à la détermination des limites du développement de $f(x+i)$.

Soient d'abord p et q les valeurs de $x+i$ qui rendent la fonction dérivée $f'(x+i)$ la plus petite et la plus grande, en regardant x comme une quantité donnée, et faisant varier i depuis zéro jusqu'à une valeur quelconque donnée de i; donc $f'p$ sera la plus petite valeur de $f'(x+i)$, et $f'q$ sera sa plus grande valeur; par conséquent, $f'(x+i)-f'p$ et $f'q-f'(x+i)$ seront toujours des quantités positives dans cette étendue de valeurs de i. Il est nécessaire d'observer qu'il faut entendre par quantités plus grandes et plus petites absolument, celles qui sont plus avancées vers l'infini positif et vers l'infini négatif; en sorte que a étant $>b$, on a....... $-a<-b$. Donc si $f'(x+i)$ est toujours négative depuis $i=0$ jusqu'à i, on aura encore, d'après cette observation, les différences $f'(x+i)-f'p$ et $f'q-f'(x+i)$ positives.

Regardant ces deux différences comme des fonctions dérivées relatives à la variable t, puisque i seul varie, leurs fonctions primitives, prises de manière qu'elles deviennent nulles pour $i=0$, seront, à cause de x, p et q constantes

$$f(x+i)-fx-if'p,\quad if'q-f(x+i)+fx\ (*).$$

(*) Il est clair que l'intégrale de $f'(x+i)-f'p$ est $f(x+i)-ifp$ puisqu'en différentiant par rapport à i, on trouve, en ne retenant que le coefficient, la dérivée proposée; mais en ajoutant la constante qui doit completter toute intégrale, on a $f(x+i)-ifp+C$; et comme cette intégrale doit devenir nulle pour $i=0$, on aura cette condition

$$fx+C=0,\quad \text{d'où}\quad C=-fx.$$

Donc, la fonction primitive, prise de manière qu'elle s'évanouisse pour

Ainsi, pourvu que $f'(x+i)$ ne soit jamais infinie depuis $i=0$ jusqu'à la valeur de i qu'on considère, ce qui aura lieu si $f'p$ et $f'q$ ne sont pas infinies, on aura, par le principe précédent, si i est positif,

$$f(x+i)-fx-if'p>0,\quad if'q-f(x+i)+fx>0;$$

d'où l'on tire

$$f(x+i)>fx+if'p,\quad f(x+i)<fx+if'q.$$

Ainsi le développement de $f(x+i)$ est compris entre les deux seconds membres de ces inégalités.

Supposons ensuite que p et q soient les valeurs de $x+i$, qui rendent la fonction dérivée du second ordre $f''(x+i)$, la plus petite et la plus grande, en faisant varier i depuis zéro jusqu'à une valeur donnée de i : on aura $f''p$ et $f''q$ pour la plus petite et la plus grande valeur de $f''(x+i)$; par conséquent

$$f''(x+i)-f''p>0.\quad f''q-f''(x+i)>0.$$

Regardant ces différences comme des fonctions dérivées relatives à la variable i, leurs fonctions primitives prises de manière qu'elles soient nulles pour $i=0$, seront (*note*).

$$f'(x+i)-f'x-if''p,\quad if''q-f'(x+i)+f'x.$$

Donc, pourvu que $f''(x+i)$ ne soit jamais infinie dans toute l'étendue de $i=0$ à i, ce qui revient à ce que $f''p$ et $f''q$ ne soient pas infinies, ces deux quantités seront, d'après le principe, toujours positives et finies, i étant positif; et

---

$i=0$, est en effet $f(x+i)-fx-if'p$. On trouverait de la même manière la seconde intégrale.

en les regardant comme des fonctions dérivées par rapport à i, leurs fonctions primitives, prises de manière qu'elles soient nulles pour $i = 0$, seront, à cause de x, p, q constantes,

$$f(x+i) - if'x - \frac{i^2}{2}f''p - fx,$$

$$\frac{i^2}{2}f''q - f(x+i) + if'x + fx.$$

Ces nouvelles quantités seront donc aussi, par le même principe, toujours positives, et on déduira de là

$$f(x+i) > fx + if'x + \frac{i^2}{2}f''p,$$

$$f(x+i) < fx + if'x + \frac{i^2}{2}f''q.$$

Le reste du développement, lorsqu'on prend les deux premiers termes, est donc compris entre les deux limites $\frac{i^2}{2}f''p$ et $\frac{i^2}{2}f''q$.

Si on suppose, en troisième lieu, que p et q soient les valeurs de $x+i$, qui rendent la fonction tierce $f'''(x+i)$ la plus petite, et la plus grande depuis $i=0$ jusqu'à i, on aura les deux quantités $f'''(x+i) - f'''p$, $f'''q - f'''(x+i)$, nécessairement positives dans cette étendue des valeurs de i; donc en les regardant comme des fonctions dérivées relatives à la variable i, leurs fonctions primitives prises de manière qu'elles deviennent nulles pour $i = 0$, seront

$$f''(x+i) - if'''p - f''x,$$
$$if'''q - f''(x+i) + f''x;$$

et ces quantités seront positives et finies, pourvu que $f^{\text{IV}}(x+i)$

ne devienne pas infinies depuis zéro jusqu'à i, c'est-à-dire, pourvu que $f'''p$ et $f'''q$ ne soient pas infinies.

Donc, en regardant de nouveau ces dernières quantités comme des fonctions dérivées relatives à i, leurs fonctions primitives, prises de manière qu'elles soient nulles pour $i=0$, seront

$$f'(x+i) - \frac{i^2}{1.2} f''p - if''x - f'x,$$

$$\frac{i^2}{1.2} f''q - f'(x+i) + if''x + f'x,$$

lesquelles seront, par conséquent, toujours positives et finies, en vertu du même principe.

Ainsi, regardant encore ces nouvelles quantités comme des fonctions relatives à i, leurs fonctions primitives, prises de manière qu'elles deviennent nulles pour $i=0$, seront

$$f(x+i) - \frac{i^3}{2.3} f''p - \frac{i^2}{2} f''x - if'x - fx,$$

$$\frac{i^3}{2.3} f''q - f(x+i) + \frac{i^2}{2} f''x + if'x + fx.$$

Ces quantités seront donc encore positives par le même principe; et on tirera de là

$$f(x+i) > fx + if'x + \frac{i^2}{1.2} f''x + \frac{i^3}{2.3} f''p,$$

$$f(x+i) < fx + if'x + \frac{i^2}{1.2} f''x + \frac{i^3}{2.3} f''q.$$

Et ainsi de suite.

Considérons maintenant $f'(x-i)$, et soient toujours p et q les valeurs de $x-i$ qui rendent $f'(x-i)$ la plus petite et la plus grande, en faisant varier i de zéro à i; les différences $f'(x-i) - f'p$, $f'q - f'(x-i)$ seront toujours des

quantités positives, quel que soit le signe de $f'(x-i)$; mais comme i est devenu négatif, ces dernières différences auront le signe moins, d'après le principe : ainsi

$$f'(x-i)-f'p<0, \quad f'q-f'(x-i)<0,$$

et les fonctions primitives prises de manière qu'elles deviennent nulles pour $i=0$, seront

$$f(x-i)+if'p-fx, \quad -if'q-f(x-i)+fx,$$

et négatives : en sorte que

$$f(x-i)<fx-if'p, \quad f(x-i)>fx-if'q.$$

On trouverait pour secondes limites

$$f(x-i)<fx-if'x+\frac{i^2}{2}f''p,$$

$$f(x-i)>fx-if'x+\frac{i^2}{2}f''q.$$

Et ainsi des autres.

Donc, en général, la fonction $f(x+i)$, soit que i soit positif, soit qu'il soit négatif, sera toujours renfermée entre ces deux limites

$$\left.\begin{array}{l} fx+if'x+\frac{i^2}{1.2}f''x+\frac{i^3}{1.2.3}f'''x+\ldots+\frac{i^\mu}{2.3\ldots\mu}f^\mu p, \\ fx+if'x+\frac{i^2}{1.2}f''x+\frac{i^3}{1.2.3}f'''x+\ldots+\frac{i^\mu}{2.3\ldots\mu}f^\mu q. \end{array}\right\}(A)$$

en prenant pour p et q les valeurs de $x+i$ qui répondent à la plus petite et à la plus grande des valeurs de $f^\mu(x+i)$, dans toute l'étendue de i, depuis $i=0$ jusqu'à la valeur actuelle de i, pourvu que les deux quantités $f^\mu p$, $f^\mu q$ ne soient pas infinies.

Il est d'ailleurs facile de voir qu'on peut prendre pour $f^{\mu}p$ et $f^{\mu}q$ une valeur quelconque plus petite que la plus petite, et plus grande que la plus grande des valeurs de $f^{\mu}(x+i)$, ce qui peut servir, dans nombre de cas, à faciliter beaucoup la détermination des limites, comme on le verra bientôt sur des exemples.

Lorsqu'on fait $x=0$, la fonction $f(x+i)$ devient fi, et peut représenter une fonction quelconque d'une variable i; mais comme les valeurs de $fx, f'x, f''x$, etc., lorsque $x=0$, doivent coïncider avec celles de $fi, f'i, f''i$, etc., lorsque $i=0$, il s'ensuit que si on dénote simplement par f, f', f'', etc., les valeurs de $fi, f'i, f''i$, etc., pour $i=0$, on aura, en général,

$$fi = f + if' + \frac{i^2}{2}f'' + \frac{i^3}{2.3}f''' + \text{etc.},$$

et si on veut s'arrêter au terme dont le rang est marqué par μ, comme le terme suivant serait $\frac{i^{\mu}}{1.2.3\ldots\mu}f^{\mu}$, il n'y aura qu'à substituer pour f^{μ} la plus grande et la plus petite valeur de $f^{\mu}i$, ou des valeurs plus grandes et plus petites que celles-ci, et l'on aura les limites du reste du développement.

Puisque ces limites répondent à la plus grande et à la plus petite valeur de $f^{(\mu)}i$, il est clair que la valeur exacte du reste du développement de la fonction fi, répondra à une valeur intermédiaire de $f^{(\mu)}i$, qui pourra être représentée par $f^{\mu}j$, en prenant pour j une quantité entre zéro et i. Il suit de là qu'on pourra toujours représenter d'une manière finie le développement d'une fonction quelconque fi, en y introduisant une quantité inconnue moindre que i. Ainsi on a ce théorème analytique remarquable par sa simplicité :

$$fi = f + if' + \frac{i^2}{1.2}f'' + \ldots + \frac{i^{\mu-1}}{1.2..(\mu-1)}f^{(\mu-1)} + \frac{i^\mu}{1.\ldots\ldots\mu}f^{(\mu)}j, \ldots (B)$$

où f, f', f''. . . . . . sont les valeurs de fi, en y faisant $i=0$.

On a par là, dit M. *Lagrange*, une démonstration rigoureuse de cette proposition qu'on s'était contenté de supposer jusqu'ici, savoir que, dans le développement d'une fonction, on peut donner à la variable suivant laquelle est ordonné le développement, une valeur assez petite pour qu'un terme quelconque de la série, soit plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent; car il est clair qu'il suffit pour cela de prendre i assez petit pour que l'on ait

$$\frac{i^{(\mu-1)}}{1.2.3..(\mu-1)}f^{(\mu-1)} > \frac{i^\mu}{1.2.3.\ldots.\mu}f^{(\mu)}j,$$

condition qui se réduit à celle-ci, $f^{(\mu-1)} > \frac{i}{\mu} f^{(\mu)}j$, à laquelle il est visible qu'on peut toujours satisfaire, en diminuant la valeur de i, pourvu qu'on n'ait pas $f^{(\mu-1)} = 0$.

On peut démontrer de la même manière que si l'on a deux fonctions différentes fi et Fi qui soient telles que les μ premiers termes du développement de fi, soient respectivement égaux aux μ premiers termes du développement de Fi; on peut, en diminuant la quantité i, rapprocher les valeurs de ces deux fonctions, à tel point que la valeur d'aucune autre fonction, telle que φi, ne puisse jamais tomber entre ces valeurs, si les μ premiers termes du développement de φi, ne coïncident pas aussi avec ceux du développement de fi et Fi; car la différence

$$Fi - fi = \frac{i^\mu}{1.2.3.\ldots.\mu}(Fj - fj),$$

où la quantité j, plus petite que i, pourra être différente dans les deux fonctions : au lieu que la différence

$$\varphi i - fi = \frac{i^{\lambda}}{1.2.3\ldots\lambda}(\varphi^{\lambda} - f^{\lambda}) + \text{etc.} + \frac{i^{\mu}}{1.2.3\ldots\mu}(\varphi j - fj)$$

λ étant $< \mu$: et l'on voit qu'en diminuant la valeur de i, le rapport de cette différence à la première, deviendra toujours plus grand, à moins qu'on n'ait aussi $\varphi^{\lambda} = f^{\lambda}$.

C'est sur ces principes qu'est fondée l'application rigoureuse du calcul différentiel à la géométrie, comme on le verra dans la seconde partie de ce traité.

Supposons, pour donner quelques exemples, $fx = x^m$, et conséquemment $f(x+i) = (x+i)^m$: donc

$$f'x = mx^{m-1},\ f''x = m(m-1)x^{m-2},$$
$$f'''x = m(m-1)(m-2)x^{m-3}, \text{ etc.},$$

et en général,

$$f^{(\mu)}x = Qx^{m-\mu},$$

Q étant $= m(m-1)(m-2)\ldots(m-(\mu-1))$: on aura donc $f^{(\mu)}(x+i) = Q(x+i)^{m-\mu}$; et l'on voit que $f^{(\mu)}(x+i)$ ne peut jamais devenir infinie tant que $x+i$ n'est pas zéro, et que μ n'est pas $> m$. On voit aussi que la plus petite et la plus grande valeur de $Q(x+i)^{m-\mu}$, répondent l'une à $i=0$, et l'autre à i, de sorte que les valeurs p et q seront x et $x+i$, ou $x+i$ et x. Donc, en général, le développement de $(x+i)^m$ sera compris entre ces deux limites, déduites des développemens (A);

$$x^m + mix^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}i^2x^{m-2} + \ldots + \frac{Qi^{\mu}}{2.3\ldots\mu}x^{m-\mu}$$

$$x^m + mix^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}i^2x^{m-2} + \ldots + \frac{Qi^{\mu}}{2.3\ldots\mu}(x+i)^{m-\mu}.$$

Soit, en second lieu,

$$f(x+i)=a^{x+i},$$

on sait (pag. 35, 47) que

$$f'x=la.a^x;\ f''x=(la)^2.a^x,\ f'''x=(la)^3.a^x, \text{ etc.}$$

Donc, en général,

$$f^{(\mu)}(x+i)=(la)^\mu a^{x+i},$$

et l'on voit que la plus petite et la plus grande valeur de $f^{(\mu)}(x+i)$, répondent encore à $i=0$ et à i. Ainsi on aura, en faisant $x=0$, ces développemens déduits de (B),

$$1+la.i+\frac{(la)^2}{1.2}i^2+\frac{(la)^3}{1.2.3}i^3+\ldots+\frac{(la)^\mu}{1.2.3\ldots\mu}i^\mu$$

$$1+la.i+\frac{(la)^2}{1.2}i^2+\frac{(la)^3}{1.2.3}i^3+\ldots+\frac{(la)^\mu}{1.2.3\ldots\mu}i^\mu a^i$$

pour les limites de la valeur de a^i, où l'on pourra prendre dans le dernier terme, au lieu de a^i, une quantité quelconque plus grande.

Soit, en troisième lieu,

$$f(x+i)=l(x+i),$$

l indiquant le logarithme népérien. On a (pag. 37, 48),

$$f'x=\frac{1}{x},\ f''x=-\frac{1}{x^2},\ f'''x=\frac{2}{x^3}, \text{ etc.}$$

Donc

$$f^{(\mu)}(x+i)=\pm\frac{2.3\ldots(\mu-1)}{(x+i)^\mu},$$

le signe supérieur étant pour le cas de μ impair, et l'inférieur pour celui de μ pair. Il est clair que pourvu que $x+i$ ne soit

pas zéro, la quantité $f^{(\mu)}(x+i)$ ne sera jamais infinie, et que sa plus grande et sa plus petite valeur répondront encore à $i=0$ et à i. On aura par les formules (A) ces deux limites de $l(x+i)$,

$$lx+\frac{i}{x}-\frac{i^2}{2x^2}+\frac{i^3}{3x^3}-\text{etc.}\ldots\pm\frac{i^\mu}{\mu x^\mu}$$

$$lx+\frac{i}{x}-\frac{i^2}{2x^2}+\frac{i^3}{3x^3}-\text{etc.}\ldots\pm\frac{i^\mu}{\mu(x+i)^\mu},$$

où l'on pourra mettre à la place de i une valeur quelconque plus grande dans le dénominateur $(x+i)^\mu$.

Soit, en quatrième lieu,

$$f(x+i)=\sin(x+i),$$

on aura (pag. 41, 52)

$$f'x=\cos x,\ f''x=-\sin x,\ f'''x=-\cos x,\ f^{\text{iv}}x=\sin x,\ \text{etc.}$$

Donc, en général,

$$f^{(\mu)}(x+i)=\pm\sin(x+i)\ \text{ou}\ =\pm\cos(x+i),$$

suivant que μ sera de l'une de ces formes $4n$, $4n+2$, $4n+1$, $4n+3$, n étant un nombre entier quelconque; ce qu'on peut renfermer dans cette expression générale

$$f^{(\mu)}(x+i)=\sin(x+i+\mu D),$$

D étant l'angle droit, ainsi qu'on peut le vérifier sur les quatre formules

$$f'(x+i)=\cos(x+i),\ f''(x+i)=-\sin(x+i),$$
$$f'''(x+i)=-\cos(x+i),\ f^{\text{iv}}(x+i)=\sin(x+i).$$

Or, quelles que soient les valeurs de x et i, il est visible que la plus grande et la plus petite valeur de $f^{(\mu)}(x+i)$, seront $+1$

et -1. Ainsi on aura pour le développement de $\sin(x+i)$, ces limites,

$$\sin x + i\cos x - \frac{i^2}{1.2}\sin x - \frac{i^3}{1.2.3}\cos x + \ldots \pm \frac{i^\mu}{1.2.3\ldots\mu}.$$

Si on fait $x=0$, ces limites deviendront pour $\sin i$

$$i - \frac{i^3}{1.2.3} + \frac{i^5}{1.2\ldots5}\ldots\ldots \pm \frac{i^\mu}{1.2.3.\mu};$$

et pour $x=D$, on aura pour les limites de $\cos i$;

$$1 - \frac{i^2}{1.2} + \frac{i^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}\ldots \pm \frac{i^\mu}{1.2.3\ldots\mu};$$

en observant qu'on doit prendre pour μ le nombre immédiatement plus grand d'une unité que l'exposant de i dans le terme auquel on voudra s'arrêter. En sorte que si l'on veut ne prendre de la série de $\sin i$, que jusqu'au terme... $\frac{i^5}{1.2\ldots5}$ inclusivement, le reste sera compris entre.......
$\pm \frac{i^6}{1.2\ldots\ldots6}$.

Nous avons donné (pag. 84 et 85) la série du développement de $\varphi(y+h)$, en supposant $y=\text{tang}\, x$ et $\varphi y=x$, et nous avons trouvé en général $f^{(\mu)}y=\pm 2.3\ldots(\mu-1)\cos^\mu x \times \sin$ ou $\cos \mu x$. Donc on aura aussi, en faisant ....
$y+h=\text{tang}(x+i)=\text{tang}\, z$,

$$f^{(\mu)}(y+h)=\pm 2.3\ldots(\mu-1)\cos^\mu z \times \sin \text{ ou } \cos \mu z.$$

Or, quels que soient y et h, il est visible que la plus petite et la plus grande valeur de $\cos^\mu z \times \sin$ ou $\cos \mu z$, seront -1 et $+1$: d'où on peut d'abord conclure que la série est vraie pour des valeurs quelconques de x et i, et que si l'on veut s'arrêter au terme μ^{me}, le reste de la série sera nécessairement renfermé entre

les limites $\pm\frac{i^\mu}{\mu}$. Ainsi, en faisant $x=0$, on aura ces limites de arc (tang$=h$),

$$h-\frac{h^3}{3}+\frac{h^5}{5}\ldots\pm\frac{h^{\mu+1}}{\mu+1},$$

où μ est le rang du terme auquel on veut s'arrêter.

On peut encore résoudre la question des limites par l'analyse suivante.

Si a est une constante, si les fonctions $f'(a-x)$, $f''(a-x)$, $f'''(a-x)$, etc., désignent $\frac{\mathrm{d}f(a-x)}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2f(a-x)}{\mathrm{d}x^2}$, ... $\frac{\mathrm{d}^3f(a-x)}{\mathrm{d}x^3}$, etc., et $\int\frac{x^3}{1.2.3}\mathrm{d}x f^{\text{IV}}(a-x)$ indique *l'intégrale* de $\frac{x^3}{1.2.3}\mathrm{d}x\, f^{\text{IV}}(a-x)$, c'est-à-dire, la fonction qui a pour différentielle $\frac{x^3}{1.2.3}\mathrm{d}x\, f^{\text{IV}}(a-x)$, je dis qu'on a, par exemple, l'identité

$$fa=f(a-x)+xf'(a-x)+\frac{x^2}{1.2}f''(a-x)$$
$$+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(a-x)+\int\frac{x^3}{1.2.3}\mathrm{d}x f^{\text{IV}}(a-x)\ldots(1);$$

En effet, en différentiant de part et d'autre par rapport à x, et ne retenant que les coefficiens différentiels, on trouve

$$0=-f'(a-x)-xf''(a-x)-\frac{x^2}{1.2}f'''(a-x)-\frac{x^3}{1.2.3}f^{\text{IV}}(a-x)$$
$$+f'(a-x)+xf''(a-x)+\frac{x^2}{1.2}f'''(a-x)+\frac{x^3}{1.2.3}f^{\text{IV}}(a-x),$$

en observant que chacun des termes de la suite, à l'exception du terme $\int$, est un produit, et que $\frac{\mathrm{d}f^{(m)}(a-x)}{\mathrm{d}x}=-f^{(m+1)}(a-x)$. On a donc généralement l'identité

$$fa = f(a-x) + xf'(a-x) + \ldots + \frac{x^m}{1.2\ldots m} f^{(m)}(a-x)$$
$$+ \int \frac{x^m}{1.2\ldots m} dx f^{(m+1)}(a-x),$$

conclusion qu'on déduirait directement de l'intégration par parties de udv, u et v étant deux fonctions de x (*).

(*) Pour démontrer cette formule, dont nous n'avons fait que constater l'exactitude; soient u et v deux fonctions de x, et l'expression différentielle udv; si l'on désigne par ce signe $\int$, mis en avant de udv et de vdu, les fonctions primitives ou les intégrales des différentielles udv et vdu, on aura

$$\int udv = C + uv - \int vdu \quad \ldots \quad (1)$$

C étant la constante arbitraire qui complette l'intégrale. En effet, si l'on différentie de part et d'autre, en observant que la différentielle d'une intégrale indiquée, est la quantité sous le signe $\int$, et que la différentielle d'une constante est nulle, on aura

$$udv = udv + vdu - vdu;$$

et conséquemment, après la réduction, $udv = udv$. Si l'on veut pareillement développer l'intégrale indiquée $\int vdu$, c'est-à-dire, la décomposer en deux termes, on aura, en posant $du = u'dx$, $\int vdx = {}'v$,

$$\int vdu \quad \text{ou} \quad \int u'.vdx = u'.{}'v - \int {}'vdu';$$

donc

$$-\int v.u = -u'.{}'v + \int {}'vdu',$$

et conséquemment

$$\int udv = C + uv - u'.{}'v + \int {}'vdu'.$$

Qu'on pose $du' = u''dx$, $\int {}'vdx = {}''v$, et on aura

$$\int {}'vdu' \quad \text{ou} \quad \int u''.{}'vdx = u''.{}''v - \int {}''vdu''.$$

Ainsi

$$\int udv = C + uv - u'.{}'v + u''.{}''v - \int {}''vdu''.$$

Maintenant dans l'intégrale $\int \frac{x^3}{1.2.3} dx f^{\text{IV}}(a-x)$, on remplacera le facteur variable $f^{\text{IV}}(a-x)$ par le facteur constant M, qu'on supposera plus grand que la plus grande de toutes les valeurs que peut prendre $f^{\text{IV}}(a-x)$, en faisant varier x depuis zéro jusqu'à sa valeur actuelle x : ainsi $\int M \frac{x^3}{1.2.3} dx$ qui est $M \frac{x^4}{1.2.3.4}$, surpassera la valeur de l'intégrale. Pareillement, si l'on écrit au lieu de $f^{\text{IV}}(a-x)$ la constante N prise égale à la plus petite des valeurs que reçoit

---

En faisant encore $du'' = u'''dx$, $\int ''v dx = '''v$, on aura

$$-\int ''v . du'' = -u''' \, '''v + \int '''v \, du'''.$$

Donc

$$\int u dv = C + uv - u'.'v + u''.''v - u'''.'''v + \int u^{\text{IV}} \, {}^{\text{IV}}v du :$$

en observant qu'il ne faut ajouter que la seule constante C, parce qu'en total, toutes ces intégrations par parties ne servent qu'à développer $\int u dv$.

Faisons, dans la formule (1), $dv = dx$, $u = \varphi'(a-x)$, cette formule deviendra

$$\int \varphi'(a-x) dx = C + x\varphi'(a-x) + \int x\varphi''(a-x) dx,$$

en observant que $du = -dx\varphi''(a-x)$. Mais $\int \varphi'(a-x) dx = -\varphi(a-x)$; donc l'identité précédente devient

$$-\varphi(a-x) = C + x\varphi'(a-x) + \int x\varphi''(a-x) dx.$$

Si l'intégrale $\int x\varphi''(a-x) dx$ doit s'évanouir pour $x = 0$, on aura $-\varphi a = C$, et conséquemment

$$-\varphi(a-x) = -\varphi a + x\varphi'(a-x) + \int x\varphi''(a-x) dx;$$

d'où l'on tire

$$\varphi a = \varphi(a-x) + x\varphi'(a-x) + \int x\varphi''(a-x) dx.$$

Si l'on exécute en partie $\int x\varphi''(a-x) dx$ ou $\int \varphi''(a-x) x dx$, on aura

$f^{\text{IV}}(a-x)$, depuis $x=0$ jusqu'à $x=x$, on trouvera pour l'intégrale, $N\dfrac{x^4}{1.2.3.4}$, quantité moindre que la plus petite valeur de l'intégrale.

Ainsi le terme $\int\dfrac{x^3}{1.2.3}\,dx f^{\text{IV}}(a-x)$ est égal au produit de $\dfrac{x^4}{1.2.3.4}$ par une quantité comprise entre M et N,

---

$$\int\varphi''(a-x)\,x\,dx=\frac{x^2}{1.2}\varphi''(a-x)+\int\frac{x^2}{1.2}\varphi'''(a-x)\,dx;$$

et pareillement

$$\int\varphi'''(a-x)\,\frac{x^2dx}{1.2}=\frac{x^3}{1.2.3}\varphi'''(a-x)+\int\frac{x^3}{1.2.3}\varphi^{\text{IV}}(a-x)\,dx.$$

Donc enfin, on a ce développement vérifié dans le texte,

$$\varphi a=\varphi(a-x)+x\varphi'(a-x)+\frac{x^2}{1.2}\varphi''(a-x)$$
$$+\frac{x^3}{1.2.3}\varphi'''(a-x)+\int\frac{x^3}{1.2.3}\varphi^{\text{IV}}(a-x)\,dx.$$

Comme rien n'empêche de reculer le terme intégral aussi loin que l'on voudra, on pourra écrire

$$\varphi a=\varphi(a-x)+x\varphi'(a-x)+\frac{x^2}{1.2}\varphi''(a-x)$$
$$+\frac{x^3}{1.2.3}\varphi'''(a-x)+\text{etc.}$$

Si, dans cette identité, on écrit d'abord $a+x$ pour a, et qu'on change ensuite a en x et x en i, on retombera sur le développement de *Taylor*. Le seul changement de a en x dans l'identité précédente conduit à

$$\varphi x=\varphi 0+x\varphi' 0+\frac{x^2}{1.2}\varphi'' 0+\text{etc.},$$

qui est le théorème de *Maclaurin*.

c'est-à-dire, par $f^{\text{IV}}(a-x)$ pour une valeur de x prise entre zéro et la dernière valeur, ou la valeur actuelle de x.

On peut représenter cette valeur intermédiaire de $f^{\text{IV}}(a-x)$ par $f^{\text{IV}}(a-(x-j))$, j représentant une quantité entre zéro et x; ainsi on aura

$$fa=f(a-x)+xf'(a-x)+\frac{x^2}{1.2}f''(a-x)$$
$$+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(a-x)+\frac{x^4}{1.2.3.4}f^{\text{IV}}(a-(x-j)):$$

que l'on change maintenant a en $a+x$, et l'identité précédente deviendra

$$f(a+x)=fa+xf'a+\frac{x^2}{1.2}f''a+\frac{x^3}{1.2.3}f'''a$$
$$+\frac{x^4}{1.2.3.4}f^{\text{IV}}(a+j),$$

si l'on écrit x au lieu de a, et i au lieu de x, on retrouvera enfin

$$f(x+i)=fx+if'x+\frac{i^2}{1.2}f''x+\frac{i^3}{1.2.3}f'''x$$
$$+\frac{i^4}{1.2.3.4}f^{\text{IV}}(x+j),$$

où j est une valeur intermédiaire entre zéro et l'accroissement i de x.

Cette analyse que nous étendrons bientôt aux développemens des fonctions de plusieurs variables, exige que $f^{\text{IV}}(a-x)$ ne devienne pas infinie par toutes les variations de x depuis zéro jusqu'à x, ou que dans le développement de $f(x+i)$, la fonction $f^{\text{IV}}(x+i)$, ne devienne pas infinie depuis x jusqu'à $x+i$.

CHAPITRE XII.

Application du Calcul différentiel aux développemens en séries de quelques fonctions d'une seule variable.

Dans le chap. VII, nous avons donné le développement de l'arc suivant les puissances de la tangente. On pourrait aussi développer l'arc suivant les puissances de son sinus, de son cosinus, et enfin suivant celles de l'une quelconque de ses lignes trigonométriques.

La solution de ces questions exige qu'on forme les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., y étant l'arc, et x la ligne trigonométrique, qu'on y fasse $x=0$, et qu'on change i en x pour connaître (y^0), (y'^0), etc. Mais à l'égard des expressions dont il s'agit ici, la loi des coefficiens numériques (y^0), (y'^0), etc. obtenus comme nous venons de le dire, est très-irrégulière, et conséquemment on ne peut s'en aider dans la formation successive des termes de la série. L'analyse suivante donne le terme général du développement, et conséquemment la loi de la série.

Soit donc $y=\text{arc}\,(\sin = x)$: on sait (pag. 43) que

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-xx}}.$$

Si l'on développe $(1-xx)^{-\frac{1}{2}}$ par la formule du binome, on

trouvera

$$\frac{dy}{dx}=1+\frac{\frac{1}{2}}{1}x^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}x^4+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3}x^6+\ldots\ldots$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\ldots\frac{2p-1}{2}}{1.2.3\ldots p}x^{2p}$$

Mais on a

$$y=(y^{\circ})+(y'^{\circ})\frac{x}{1}+(y''^{\circ})\frac{x^2}{1.2}+(y'''^{\circ})\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{(y^{n\circ})}{1.2.3\ldots n}x^n.$$

En différentiant et observant que (y°), (y'°), etc., sont des constantes, il vient

$$\frac{dy}{dx}=(y'^{\circ})+(y''^{\circ})\frac{x}{1}+(y'''^{\circ})\frac{x^2}{1.2}+(y^{\text{iv}\circ})\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{(y^{n\circ})}{1.2.3\ldots(n-1)}x^n$$

La comparaison des termes généraux des deux développemens de $\frac{dy}{dx}$, donne, 1°. entre les exposans de x, cette relation,

$$2p=n-1\text{, d'où } n=2p+1;$$

2°. entre les coefficiens

$$\frac{(y^{n\circ})}{1.2\ldots(n-1)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\ldots\frac{2p-1}{2}}{1.2.3\ldots\ldots\ldots p}=\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots.2p},$$

en multipliant chacun des facteurs du dénominateur par le dénominateur du facteur qui lui correspond dans le numérateur. Donc on a pour terme général

$$\frac{(y^{n\circ})}{1.2\ldots(n-1)n}x^n=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p(2p+1)}x^{2p+1}.$$

Pour $x=0$, on a $y=(y^\circ)=0$. On fera ensuite........ $p=1,=2,=3$, etc., hypothèses qui donnent $n=3,=5,=7$, etc., ce qui apprend que le développement ne conserve que les termes de puissances impaires de x, au nombre desquels doit se trouver le terme en x, qu'on ne peut tirer du terme général, parce qu'il serait donné par $p=0$. Pour l'obtenir, il faudra avoir recours à l'expression

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-xx}},$$

qui, pour $x=0$, donne $(y'^\circ)=1$. On trouve ensuite

$$(y'''^\circ)=1,\quad (y^{\text{v}\circ})=3.3,\quad (y^{\text{vii}\circ})=3.3.5.5.\text{etc.},$$

et conséquemment

$$\text{arc}\,(\sin=)=x+\frac{x^3}{2.3}+\frac{1.3.x^5}{2.4.5}+\frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7}+\text{etc.},$$

développement connu.

On s'y prendrait exactement de la même manière pour obtenir les développemens suivant l'arc, de arc (cos $=x$), arc (tang $=x$), etc., applications que nous laisserons à faire.

La formule de *Maclaurin* ne peut plus être employée, ainsi que nous l'avons déja reconnu, lorsque quelques-unes des fonctions (y'°), (y''°), etc., deviennent infinies, parce que la fonction ne procède plus suivant les puissances entières et positives de la variable. On peut alors faire $y=x^kz$, en déterminant l'exposant k sous la condition que $x=0$ ne rende infini aucun des coefficiens (y'°), (y''°), etc.

Si, par exemple, on veut développer cot x en série, comme on reconnaît d'avance que ce développement ne peut procéder

suivant les puissances entières et positives de x, puisque pour $x=0$, $y=\cot 0=\infty$, on fera $y=\frac{z}{x}=\cot x$; d'où.... $z=\frac{x\cos x}{\sin x}$, et (pag. 41)

$$z=\frac{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\text{etc.}}{1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4-\text{etc.}}.$$

Or, en prenant les fonctions dérivées de z, on trouvera aisément pour $x=0$,

$$(z^\circ)=1,\quad (z'^\circ)=0,\quad (z''^\circ)=-\frac{2}{3},\ \text{etc.}$$

d'où

$$z=1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{3^2.5},\ \text{etc.}$$

et

$$y=\frac{z}{x}=\cot x=x^{-1}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{3^2.5}-\frac{2x^5}{3^3.5.7}-\frac{x^7}{3^3.5^2.7},\ \text{etc.}$$

Passons à l'équation

$$my^3-xy=m,$$

et proposons-nous de développer y suivant x : on trouvera (chap. VI),

$$(y^\circ)=1,\quad (y'^\circ)=\frac{1}{3m},\quad (y''^\circ)=0,\quad (y'''^\circ)=\frac{-2}{27m^3}\ \text{etc.}$$

Donc

$$y=1+\frac{x}{3m}-\frac{x^3}{81m^3}+\frac{x^4}{243m^4}-\text{etc.}\ldots(1).$$

Si on veut développer suivant les puissances de m, l'équation

$$my^3-x^3y-mx^3=0,$$

on prendra les coefficiens y', y''... par rapport à m, en traitant x comme une constante, puis on fera $m=0$, ce qui changera y', y''... en $(y'0)$, $(y''0)$, etc.; et dans la série de *Maclaurin*, on remplacera x par m. En opérant ainsi, on trouve

$$y=-m-x^{-3}m^4-3x^{-6}m^7-12x^{-9}m^{10}+55x^{-12}m^{13}\ldots(2).$$

Ce développement donne $y=\infty$ pour $x=0$. En général, lorsque pour $x=0$, l'équation se réduit à $y^m=0$, on conçoit que la valeur de y peut devenir infinie. Si donc on veut développer y suivant x, il faut recourir à l'hypothèse $y=x^kz$, et alors la proposée devient

$$mz^3x^{3k}-zx^{k+3}-mx^3=0,\text{ ou } mz^3x^{3k-3}-zx^k=m,$$

en divisant par x^3 pour réduire le dernier terme à un nombre.

L'hypothèse $k=1$ réduit la précédente à

$$mz^3-xz=m.$$

Il suffira donc de changer dans (1) y en z, et de remplacer z par $\frac{y}{x}$, ce qui donnera pour l'une des racines

$$y=x+\frac{x^2}{3m}-\frac{x^4}{81m^3}+\frac{x^5}{243m^4}\ldots(3).$$

L'hypothèse $k=0$ donne

$$mz^3x^{-3}-z=m.$$

Soit $x^{-3}=u$: on développera z en u, au moyen de l'équation

$$mz^3u-z=m:$$

on restituera ensuite x^{-3} pour u, et pour z sa valeur y, et on retombera sur la série (2).

On pourra encore diviser par x^{3k} la première transformée en zx, ce qui donnera

$$mz^3 - zx^{3-2k} - mx^{3(1-k)} = 0;$$

puis on fera $k = \frac{3}{2}$, ce qui changera cette équation dans celle-ci

$$mz^3 - mx^{-\frac{3}{2}} = z.$$

Posant $x^{-\frac{3}{2}} = u$, on aura

$$mz^3 - z - mu = 0.$$

Développant z en u, puis remettant pour u sa valeur $x^{-\frac{3}{2}}$, et faisant $y = zx^{\frac{3}{2}}$, on aura

$$y = \pm \frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}} + \frac{m}{2} \mp \frac{3}{8} m^{\frac{5}{2}} . x^{-\frac{3}{2}} + \text{etc.} \ldots\ldots (4).$$

Il faut observer que la série (2) n'est que le développement de y, suivant les puissances entières et positives de m ; qu'ainsi les trois valeurs de y sont données par les séries (3) et (4). On pourrait encore faire k égal à tout autre nombre, et même dégager dans la dernière transformée le dernier terme en x, et déterminer ensuite k convenablement; mais on n'obtiendrait pas de nouvelles séries.

L'équation

$$y^3 - 5axy + x^3 = 0,$$

après y avoir fait $y = x^k . z$, et $k = 2$, $= \frac{1}{2}$, $= 1$, donne les séries suivantes :

$$y=\frac{x^2}{3a}+\frac{x^5}{3^4a^4}+\text{etc.}$$

$$y=\pm\sqrt{3ax}-\frac{x^2}{6a}\mp\frac{x^3\sqrt{3ax}}{72a^3}-\frac{x}{2.3^4a^4}, \text{ etc.}$$

$$y=-x\sqrt[3]{1}-\frac{a}{\sqrt[3]{1}}-\frac{a^2}{x}-\frac{4a^3\sqrt[3]{1}}{3x^2},$$

dont la dernière est le développement de y, suivant les puissances entières et positives de x, et les trois premières sont les trois racines de la proposée.

On trouvera plus de détails sur cette matière dans la nouvelle édition de la deuxième section de mon Algèbre.

On propose de développer

$$u=fy\ldots.(1),$$

suivant les puissances de x, la variable y étant liée à x par la relation

$$y=a+x\varphi y\ldots.(2),$$

et les fonctions fy, φy étant données.

Si entre les deux équations (1) et (2), on éliminait y, u ne contiendrait plus que x, et on pourrait faire usage de la formule de *Maclaurin*. Mais le calcul différentiel sert à former les coefficiens différentiels u', u''.... sans recourir à l'élimination.

On déduit de la seconde équation

$$\frac{dy}{dx}=\varphi y+x\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\varphi y}{dy};\quad \frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\varphi y}{dy}$$
$$+x\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d\varphi y}{dy}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2\varphi y}{dy^2},$$

et de la première,

$$\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}\frac{dfy}{dy},\quad \frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dfy}{dy}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2fy}{dy^2}\ldots$$

Si l'on fait $x=0$, la fonction y et les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$..... deviennent a, φa, $2\varphi a\frac{d\varphi a}{da}=\frac{d(\varphi a)^2}{da}$; $\frac{d^2(\varphi a)^3}{da^2}$, etc.; de sorte que, par ces substitutions, u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$...deviennent fa, $\varphi a\cdot\frac{d.fa}{da}$, $\frac{d(\varphi a)^2}{da}\cdot\frac{d.fa}{da}+(\varphi a)^2\frac{d^2fa}{da^2}$

$$=\frac{d\left\{(\varphi a)^2\times\frac{dfa}{da}\right\}}{da},\ \text{etc.}$$

Telles sont les valeurs de (u^0), (u'^0), (u''^0)....Ainsi

$$u=fa+x\varphi a.\frac{dfa}{da}+\frac{x^2}{1.2}\frac{d\left\{(\varphi a)^2\times\frac{d.fa}{da}\right\}}{da}$$
$$+\frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^2\left\{(\varphi a)^3\times\frac{d.fa}{da}\right\}}{da^2}+\text{etc.}$$

développement qu'on peut représenter très-commodément, comme il suit :

$$u=fa+x\varphi af'a+\frac{x^2}{1.2}((\varphi a)^2f'a)'$$
$$+\frac{x^3}{1.2.3}((\varphi a)^3f'a)''+\text{etc.},$$

en notant par un, deux, trois, etc., accens, les dérivées première, seconde, troisième, etc., c'est-à-dire, les coefficiens différentiels successifs pris par rapport à a.

Appliquons ce qui vient d'être dit à la recherche du dévelop-

pement de $u = y^m$, en supposant

$$y = a + xy^n;$$

on a donc

$$u = y^m, y = a + xy^n,$$

et conséquemment

$$fa = a^m, \quad \varphi a = a^n, \quad \varphi a f' a = m a^{m+n-1}$$
$$(\varphi a)^2 f' a = m a^{m+2n-1}; \quad (\varphi a)^3 f' a = m a^{m+3n-1}, \text{ etc.}$$

Donc

$$y^m = a^m + mxa^{m+n-1} + m.\frac{m+2n-1}{2} x^2 a^{m+2n-2} + \text{etc.}$$

Si l'on voulait le développement de y^m pour le cas où l'équation (2) serait

$$\alpha + \mathcal{C}y + \gamma y^n = 0,$$

on en déduirait d'abord

$$y = -\frac{\alpha}{\mathcal{C}} - \frac{\gamma}{\mathcal{C}} y^n,$$

puis on représenterait $-\frac{\alpha}{\mathcal{C}}$ par a, et $-\frac{\gamma}{\mathcal{C}}$ par x.

Si l'on suppose $x = 1$ dans la relation (2), on trouve ce développement de fy pour $y = a + \varphi y$

$$fy = fa + \varphi a f' a + \frac{1}{1.2}((\varphi a)^2 f' a)' + \frac{1}{6}((\varphi a)^3 f' a)'' + \text{etc.}$$

développement donné par M. *Lagrange* (*Résolution des équations numériques*, *notes*, 11, 21, *et les Fonctions analytiques*, 97). *Voy.* le chapitre quatorze.

Enfin, si pour $x = 1$, la fonction fy à développer est y, on a $fa = a$, $f'a = 1$, $f''a = 0$, etc., et conséquemment

$$y = a + \varphi a = a + \varphi a + \frac{((\varphi a)^2)'}{2} + \frac{((\varphi a)^3)''}{2.3} + \text{etc.}$$

Appliquons cette dernière formule au retour des suites, question déja traitée (pag. 87), et supposons

$$\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \text{etc.} = 0,$$

d'où

$$y = -\frac{\alpha}{\beta} - \frac{y^2}{\beta}(\gamma + \delta y + \text{etc.}).$$

La comparaison de cette dernière relation avec

$$y = a + \varphi y$$

donne

$$a = -\frac{\alpha}{\beta},\ \varphi y = -\frac{y^2}{\beta}(\gamma + \delta y + \text{etc.}).$$

Si l'on conserve a au lieu de $-\frac{\alpha}{\beta}$, on trouvera, d'après la formule précédente,

$$y = a - \frac{a^2}{\beta}(\gamma + \delta a + \text{etc.}) + \frac{1}{2}\left(\frac{a^4}{\beta^2}(\gamma + \delta a + \text{etc.})^2\right)' + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{6}\left(-\frac{a^6}{\beta^3}(\gamma + \delta a + \text{etc.})^3\right)'' + \text{etc.}$$

Maintenant si l'on effectue les opérations indiquées par les accens, la série deviendra

$$y = a - \frac{a^2}{\beta}(\gamma + \delta a + \varepsilon a^2 + \text{etc.}) + \frac{1}{2}\left\{\frac{4a^3}{\beta^2}(\gamma + \delta a + \text{etc.})^2\right.$$
$$\left. + \frac{2a^4}{\beta^2}(\gamma + \delta a + \text{etc.})(\delta + 2\varepsilon a + \text{etc.})\right\}$$
$$+ \frac{1}{6}\left\{-\frac{30a^4}{\beta^3}(\gamma + \delta a + \text{etc.})^3 + \text{etc.}\right\} + \text{etc.}$$
$$= a - \frac{\gamma a^2}{\beta} - \frac{\delta a^3}{\beta} - \frac{\varepsilon a^4}{\beta}$$
$$+ \frac{2\gamma^2 a^3}{\beta^2} + \frac{5\gamma\delta a^4}{\beta^2} + \text{etc.}$$
$$- \frac{5\gamma^3 a^4}{\beta^3} + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

Pour en revenir au résultat déja trouvé par une autre méthode (pag. 87), on fera dans cette dernière suite,

$$y=x,\ \alpha=m,\ \beta=-a.\ \gamma=b,\ \delta=-c,\ \varepsilon=e, \text{ etc.}$$

Nous terminerons ce chapitre par la solution d'un cas particulier de l'élimination, qui peut se présenter assez souvent.

Considérons les deux équations

$$0=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}$$
$$0=\alpha+\beta x+\gamma x^2.$$

La première du degré m, où A, B, C, etc. sont des polynomes en y, des degrés m, $m-1$, $m-2$, etc., et α, β des polynomes en y des second et premier degrés, et γ un nombre. Soit $-\frac{\alpha}{\gamma}=a$, $-\frac{\beta}{\gamma}=b$: on pourra, aux deux proposées, substituer celles-ci :

$$0=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+Gx^6+\text{etc.}$$
$$x^2=a+bx.$$

On tire de la seconde,

$$x^3=ax+bx^2=ab+(b^2+a)x,$$

en mettant pour x^2 sa valeur. On déduit de celle-ci

$$x^4=abx+(b^2+a)x^2=(ab^2+a^2)+(b^3+2ab)x$$
$$x^5=(ab^3+2a^2b)+(b^4+3ab^2+a^2)x$$
$$x^6=(ab^4+3a^2b^2+a^3)+(b^5+4ab^3+3a^2b)x.$$

et, en général,

$$x^n=ab^{n-2}+\frac{n-3}{1}a^2b^{n-4}+\frac{(n-4)(n-5)}{1.2}a^3b^{n-6}$$
$$+\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3}a^4b^{n-8}$$

$$+\left\{b^{n-1}+\frac{n-2}{1}ab^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}a^2b^{n-5}\right.$$
$$\left.+\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}a^3b^{n-7}+\text{etc.}\right\}x.$$

Ces valeurs de x^2, x^3... substituées dans la première équation, la réduisent à la forme

$$M+Nx=0.$$

Si entre cette équation et

$$x^2-bx-a=0$$

on élimine x, on aura cette équation finale,

$$M^2=aN^2-bMN.$$

On trouve par les substitutions, et en ordonnant M et N suivant les puissances ascendantes de a,

$$\begin{aligned}M=A+(C+Db+Eb^2+Fb^3+Gb^4+\text{etc.})a&\\+(E+2Fb+Gb^2+\text{etc.})a^2&\\+(G+\text{etc.})a^3&\\+\text{etc.}&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N=B+Cb+Db^2+Eb^3+Fb^4+Gb^5+\text{etc.}&\\+(D+2Eb+3Fb^2+4Gb^3+\text{etc.})a&\\+(F+3Gb+\text{etc.})a^2&\\\text{etc.}&\end{aligned}$$

Or, si l'on pose

$$\begin{aligned}B'&=B+Cb+Db^2+Eb^3+Fb^4+Gb^5+\text{etc.}\\C'&=\ldots\ldots C+Db+Eb^2+Fb^3+Gb^4+\text{etc.}\\D'&=\ldots\ldots\ldots\ldots D+Eb+Fb^2+Gb^3+\text{etc.}\\E'&=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots E+Fb+Gb^2+\text{etc.}\\F'&=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots F+Gb+\text{etc.}\\G'&=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+G+\text{etc.},\end{aligned}$$

et qu'on différentie par rapport à b, en regardant B, C, D, E, etc. comme des constantes, on aura

$$\frac{dC'}{db} = D + 2Eb + 3Fb^2 + 4Gb^3 + \text{etc.}$$

$$\frac{dD'}{db} = \ldots\ldots E + 2Fb + 3Gb^2 + \text{etc.}$$

$$\frac{d^2D'}{db^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots 2(F + 3Gb + \text{etc.})$$

$$\frac{d^2E'}{db^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2(G + \text{etc.})$$

etc.

et conséquemment

$$M = A + C'a + \frac{dD'}{db}a^2 + \frac{1}{2}\frac{d^2E'}{db^2}a^3 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3F'}{db^3}a^4 + \text{etc.}$$

$$N = B' + \frac{dC'}{db}a + \frac{1}{2}\frac{d^2D'}{db^2}a^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3E'}{db^3}a^3 + \frac{1}{2.3.4}\frac{d^4F'}{db^4}a^4 + \text{etc.}$$

ce qui fournit une règle d'une application commode pour le calcul des quantités M et N.

CHAPITRE XIII.

Du développement des fonctions de deux variables indépendantes; des différentielles de ces fonctions; des coefficiens différentiels; notations de ces coefficiens, et conditions auxquelles ils doivent satisfaire; développemens des fonctions d'un nombre quelconque de variables; théorême des fonctions homogènes.

Nous n'avons jusqu'ici parlé que des fonctions d'une seule variable; nous allons considérer des fonctions de deux variables, telles que $f(x,y)$, que nous regarderons comme indépendantes l'une de l'autre, ou dont l'une ne sera pas fonction de l'autre. Dans ce sens,

$$u=f(x, y)$$

sera l'équation d'une surface dont x, y et u seront les trois coordonnées rectangulaires, u étant la coordonnée qui se termine à la surface.

Si dans la fonction $f(x,y)$, on met à-la-fois $x+i$ à la place de x et $y+k$ à la place de y, i et k étant deux accroissemens indéterminés; qu'ensuite on développe la nouvelle fonction $f(x+i, y+k)$ suivant les puissances et les produits de i et de k, il est clair que le premier terme, sans i ni k, sera $f(x,y)$, puisqu'en faisant $i=0$, $k=0$, le développement doit se changer dans $f(x,y)$, et que les autres termes seront de nouvelles fonctions de x et y, multipliées successivement par i, k, i^2, k^2, ik, i^3, i^2k, ik^2, k^3, etc.

Mais pour parvenir à ce développement de la manière la

plus simple, on commencera par supposer qu'il n'y ait que la variable x qui se change en $x+i$, la variable y ne prenant pas d'accroissement; hypothèse permise, puisque ces deux variables n'ont entre elles aucune relation. On aura donc, d'après le théorême de *Taylor*,

$$f(x+i,y)=u+\frac{du}{dx}i+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{i^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\cdot\frac{i^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Nous supposerons ensuite que y se change en $y+k$: le résultat de cette seconde substitution, sera le développement de $f(x+i,y+k)$: pour l'effectuer, on observera que dans les fonctions u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, etc. y doit se changer en $y+k$, tandis que x ne varie pas : en sorte que, 1°. u deviendra

$$u+\frac{du}{dy}k+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

2°. $\frac{du}{dx}$ deviendra

$$\frac{du}{dx}+\frac{d.\frac{du}{dx}}{dy}k+\frac{d^2.\frac{du}{dx}}{dy^2}.\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3.\frac{du}{dx}}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

3°. $\frac{d^2u}{dx^2}$ deviendra

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d.\frac{d^2u}{dx^2}}{dy}k+\frac{d^2.\frac{d^2u}{dx^2}}{dy^2}.\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3.\frac{d^2u}{dx^2}}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

4°. $\frac{d^3u}{dx^3}$ deviendra

$$\frac{d^3u}{dx^3}+\frac{d.\frac{d^3u}{dx^3}}{dy}k+\frac{d^2.\frac{d^3u}{dx^3}}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3.\frac{d^3u}{dx^3}}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

et ainsi des autres coefficiens différentiels. Mais, d'après la convention déja faite (page 62 et suiv.), $\frac{d^m \cdot \frac{d^n u}{dx^n}}{dy^m}$ indique qu'après avoir pris la différentielle de l'ordre n de u, par rapport à la seule variable x, on prend du coefficient, qui est $\frac{d^n u}{dx^n}$, la différentielle de l'ordre m, seulement par rapport à l'autre variable y, dont on ne retient encore que le coefficient différentiel. Nous noterons ces deux opérations ainsi qu'il suit : $\frac{d^{n+m} u}{dx^n\, dy^m}$, en écrivant d'abord dx^n, puis à la suite dy^m, pour rappeler que c'est d'abord par rapport à x, et ensuite par rapport à y qu'on exécute les n et les m différentiations successives.

On a donc

$$
\begin{aligned}
(1)\ldots\ u+h=f(x+i,\ y+k)=u & \\
&+\frac{du}{dx}i+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{i^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{i^3}{1.2.3}+\text{etc.}\\
&+\frac{du}{dy}k+\frac{d^2u}{dx\,dy}.\frac{i}{1}.\frac{k}{1}+\frac{d^3u}{dx^2dy}.\frac{i^2}{1.2}.\frac{k}{1}+\text{etc.}\\
&+\frac{d^2u}{dy^2}.\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dxdy^2}.\frac{i}{1}.\frac{k^2}{1.2}+\text{etc.}\\
&+\frac{d^3u}{dy^3}.\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}
\end{aligned}
$$

développement dont le terme général est

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^m dx^n u}\ \frac{i^m.k^n}{(1.2..m)(1.2..n)}.$$

Si, au lieu de commencer par la substitution de $x+i$ pour x, et de finir par celle de $y+k$, on eût fait d'abord la dernière, on aurait eu

$$f(x,y+k)=u+\frac{du}{dy}k+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3},$$

et le changement de x en $x+i$, dans tous les termes, aurait donné pour u,

$$u+\frac{du}{dx}i+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{i^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{i^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

pour $\dfrac{du}{dy}$,

$$\frac{du}{dy}+\frac{d.\frac{du}{dy}}{dx}i+\frac{d^2.\frac{du}{dy}}{dx^2}\frac{i^2}{1.2}+\text{etc.}$$

pour $\dfrac{d^2u}{dy^2}$,

$$\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d.\frac{d^2u}{dy^2}}{dx}i+\frac{d^2.\frac{d^2u}{dy^2}}{dx^2}\frac{i^2}{1.2}+\text{etc.}$$

etc.

Mais, (pag. 62 et suivantes), $\dfrac{d^p.\frac{d^qu}{dy^q}}{dx^p}$ ou $\dfrac{d^{q+p}u}{dy^qdx^p}$ indique qu'après avoir différentié q fois de suite u par rapport à la seule variable y, on différentie p fois de suite le coefficient différentiel par rapport à l'autre variable x seulement, et qu'on ne retient encore que le coefficient. Ici, on écrit d'abord le dy^q, puis le dx^p : on a donc ce développement

$$(2)\ldots\quad u+h=f(x+i,y+k)=u$$
$$+\frac{du}{dx}i+\frac{d^2u}{dx^2}.\frac{i^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}.\frac{i^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$
$$+\frac{du}{dy}k+\frac{d^2u}{dydx}.\frac{k}{1}\frac{i}{1}+\frac{d^3u}{dydx^2}.\frac{k}{1}.\frac{i^2}{1.2}+\text{etc.}$$
$$+\frac{d^2u}{dy^2}.\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dy^2dx}.\frac{k^2}{1.2}.\frac{i}{1}+\text{etc.}$$
$$+\frac{d^3u}{dy^3}.\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

lequel est identique avec le précédent, puisqu'il revient

évidemment au même de changer d'abord x en $x+i$, et de développer suivant i; puis, dans tous les termes du développement, de changer y en $y+k$, et de développer suivant k, ou *vice versâ*. Ainsi, les coefficiens des mêmes puissances de i, de k, et des produits des mêmes dimensions en i et k, dans les développemens (1), et (2), sont identiques; on a donc d'abord

$$\frac{d^2u}{dx\,dy}=\frac{d^2u}{dy\,dx}.$$

Pour vérifier cette première conséquence sur un exemple, soit

$$u=x^my^n:$$

si on différentie d'abord par rapport à x, on aura pour coefficient différentiel,

$$\frac{du}{dx}=my^nx^{m-1},$$

lequel, différentié par rapport à y, donnera celui-ci,

$$\frac{d^2u}{dx\,dy}=mny^{n-1}x^{m-1}.$$

En opérant dans un ordre inverse, on trouve d'abord

$$\frac{du}{dy}=nx^my^{n-1},$$

et ensuite

$$\frac{d^2u}{dy\,dx}=nmx^{m-1}y^{n-1}.$$

Le résultat est donc le même, quel que soit l'ordre qu'on suive dans les différentiations.

On observera que la règle précédente pour former le $\frac{d^2u}{dydx}$, ou le $\frac{d^2u}{dx\,dy}$ dans le cas où x et y sont deux va-

riables indépendantes, est littéralement la même que celle donnée (chapitre VI) pour le cas où y dépend de x par une équation : il est donc démontré qu'à l'égard de l'équation

$$F(x+y)=0=u,$$

on a l'identité

$$\frac{d^2u}{dy\,dx}=\frac{d^2u}{dx\,dy}$$

annoncée (pag. 63), et de ce qui va suivre, on conclura d'une manière analogue les autres identités posées (ch. *idem*).

Si l'on prend dans (1) et (2) les facteurs de $\frac{i^2}{1.2}k$, on aura

$$\frac{d^3u}{dx^2dy}=\frac{d^3u}{dy\,dx^2};$$

mais

$$\frac{d^3u}{dy\,dx^2}=\frac{d^3u}{dy\,dx\,dx}=d\left(\frac{\frac{d^2u}{dy\,dx}}{dx}\right).$$

Donc, à cause de $\frac{d^2u}{dy\,dx}=\frac{d^2u}{dx\,dy}$, on aura cette suite d'identités,

$$\frac{d^3u}{dx^2dy}=\frac{d^3u}{dy\,dx^2}=\frac{d^3u}{dx\,dy\,dx}.$$

On aurait aussi

$$\frac{d^3u}{dx\,dy^2}=\frac{d^3u}{dy^2dx}=\frac{d^3u}{dy\,dx\,dy}.$$

On pourra donc conclure généralement qu'il est permis d'intervertir l'ordre des différentiations, pourvu qu'on différentie le même nombre de fois, par rapport à chacune des variables. C'est cette proposition que nous avons supposée (chap. VI).

Qu'on représente par Δx, Δy, Δu, les accroissemens finis

et quelconques de x, y, et celui de la fonction u, on aura pour différence de la fonction u

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{\Delta x^2}{1.2} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{du}{dy}\Delta y + \frac{d^2u}{dx\,dy}\cdot\frac{\Delta x}{1}\cdot\frac{\Delta y}{1} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{d^2u}{dy^2}\cdot\frac{\Delta y^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Si, de ce développement, on ne retient que les termes de première dimension en Δx et Δy, on formera l'équivalent de ce que nous avons appelé *différentielle première ou du premier ordre* (pag. 17), et comme le signe Δ ne peut pas rappeler en même tems la différence totale et une portion de cette différence, on changera Δ en d, pour noter la différentielle qui sera conséquemment

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy.$$

Il suit de cette formule que *la différentielle du premier ordre d'une fonction de deux variables indépendantes, se compose de deux parties qu'il faut soigneusement distinguer; l'une* $\frac{du}{dx}dx$, *est la différentielle prise en regardant* x *comme seule variable; l'autre* $\frac{du}{dy}dy$, *est la différentielle prise eu égard seulement à la variabilité de* y.

Dans cette différentielle

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy.$$

Les fonctions $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, sont appelées *coefficiens différentiels du premier ordre*, et les termes $\frac{du}{dx}dx$, $\frac{du}{dy}dy$, se nomment

différentielles partielles, parce qu'ils sont des parties de la différentielle totale du.

La différentielle

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy,$$

doit convenir au cas où y est une fonction de x : mais comme, dans cette hypothèse, $dy = \frac{dy}{dx}dx$, elle se change dans celle-ci,

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}.\frac{dy}{dx}dx;$$

et c'est en effet ce que devient la différentielle de $f(p, q)$, trouvée (chap. V, pag. 57), en faisant $p = x$, $q = y$, y étant fonction de x, et désignant $f(p, q)$ par u.

Lorsqu'il existe une dépendance entre y et x, les différentielles partielles ne peuvent plus être prises à part ou isolément, parce que la variation de x entraine celle de y. Pour embrasser ce cas, et celui que nous considérons ici, on suppose une relation $y = \varphi x$ qui devient arbitraire, dans le cas de l'indépendance des variables y et x.

Ainsi x et y étant deux fonctions indépendantes dont u est fonction, on trouvera aisément que

$$d(x + y) = dx + dy$$

$$d(xy) = ydx + xdy$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

$$d\left\{\frac{ay}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right\} = \frac{-ayxdx + ax^2dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$d\left\{\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{y}\right)\right\} = \frac{ydx - xdy}{y^2 + x^2}$$

etc.

Passons à la recherche des différentielles successives de la fonction u. On a déja trouvé

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy \ldots\ldots (3)$$

les coefficiens $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, étant fonction des variables x et y, on a

$$d\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d^2u}{dx^2}dx + \frac{d^2u}{dx\,dy}dy$$

$$d\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{d^2u}{dx\,dy}dx + \frac{d^2u}{dy^2}dy,$$

et conséquemment cette différentielle seconde

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}dxdy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 \ldots (4)$$

On trouvera pour la différentielle troisième,

$$d^3u = \frac{d^3u}{dx^3}dx^3 + 3\frac{d^3u}{dx^2dy}dx^2dy + 3\frac{d^3u}{dxdy^2}dxdy^2 + \frac{d^3u}{dy^3}dy^3 \ldots (5)$$

Si on continue la formation de ces différentielles successives, on remarquera que les coefficiens numériques sont ceux du binome $a+b$, élevé à une puissance marquée par l'ordre de la différentielle, et que les puissances du dx et du dy, se comportent comme celles des termes a et b. Quant aux coefficiens différentiels, la loi en est facile à saisir.

Le développement de $f(x+i,\ y+k)$ donné plus haut, devient, lorsqu'on y change i en dx, et k en dy,

$$f(x+dx,\ y+dy) =$$

$$\frac{1}{1}\left\{\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy\right\}$$

$$+\frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2\right\}$$

$$+\frac{1}{1.2.3}\left\{\frac{d^3u}{dx^3}dx^3 + 3\frac{d^3u}{dx^2dy}dx^2dy + 3\frac{d^3u}{dxdy^2}dxdy^2 + \frac{d^3u}{dy^3}dy^3\right\}$$

et comme les termes entre parenthèses, sont les différentielles successives (3), (4), (5), etc., de la fonction u, on pourra énoncer très-simplement le développement précédent en cette manière,

$$f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}x)=u+\frac{\mathrm{d}u}{1}+\frac{\mathrm{d}^2u}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3u}{1.2.3}+\frac{\mathrm{d}^4u}{1.2.3.4}+\text{etc}:$$

il est donc de même forme que celui qui (pag. 18), représente $f(x+\mathrm{d}x)$.

Nous avons trouvé cette identité

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x},$$

qui revient à

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}x},$$

en sorte que si on dénote la différentielle première par

$$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

il existera entre les fonctions P et Q la relation

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}.$$

Ainsi, *pour que deux fonctions* P *et* Q *de* x *et* y, *puissent être prises l'une pour le coefficient de la différentielle par rapport à* x, *l'autre pour celui de la différentielle par rapport à* y, *d'une fonction primitive de deux variables, il faut que la différentielle du coefficient de* dx, *prise par rapport à* y, *et celle du coefficient de* dy, *prise par rapport à* x, *aient des coefficiens identiques.*

Par exemple, on pourra supposer $P=\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q=-\frac{x}{x^2+y^2}$, parce qu'en effet

$$\frac{dP}{dy}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{dQ}{dx},$$

et on sera assuré que $\frac{y}{x^2+y^2}dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy$ est la différentielle immédiate d'une fonction de deux variables.

Soit

$$u=x\sqrt{2xy+y^2},$$

on aura

$$\frac{du}{dx}=\sqrt{2xy+y^2}+\frac{xy}{\sqrt{xy+y^2}}$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{x^2+xy}{\sqrt{2xy+y^2}};$$

puis en différentiant $\frac{du}{dx}$ par rapport à y, et $\frac{du}{dy}$ par rapport à x, et ne retenant que les coefficiens, on trouvera

$$\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}=\frac{d^2u}{dx\,dy}=\frac{x+y}{\sqrt{2xy+y^2}}+\frac{x^2y}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dx}=\frac{d^2u}{dy\,dx}=\frac{2x+y}{\sqrt{2xy+y^2}}-\frac{(x^2+xy)y}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Quoique ces deux expressions paraissent différentes, elles sont cependant identiques; car elles se réduisent l'une et l'autre à $\frac{3x^2y+3xy^2+y^3}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Ensuite

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2y}{\sqrt{2xy+y^2}}-\frac{xy^2}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3xy^2+2y^3}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}=\frac{3x^2y^2+3xy^2}{(2xy+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y}=\frac{3x^2y^2+3xy^2}{(2xy+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

résultats identiques, ainsi qu'on devait s'y attendre.

Si la fonction u n'était donnée que par une équation entre x, y et u, en sorte qu'on eût

$$F(x,y,u)=0,$$

on regarderait u comme une fonction de x et y, donnée par cette équation. Par cette substitution, la proposée aurait lieu pour toutes les valeurs de x et y, et conséquemment aussi en écrivant $x+i$ et $y+k$ pour x et y. Mais en faisant d'abord la substitution de $x+i$ pour x, et observant que y ne varie pas, puisqu'elle n'est pas fonction de x, on aura à développer une fonction de la forme $F(p,q)$, p et q étant des fonctions de x : or, le coefficient différentiel du premier ordre, est

$$\frac{\mathrm{d}(Fx)}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}(Fu)}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

On trouvera de la même manière, en regardant y comme variable, que le coefficient différentiel est

$$\frac{\mathrm{d}(Fy)}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}(Fu)}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}.$$

Or, la fonction primitive étant identiquement nulle, on a ces deux équations séparées

$$\frac{d(Fx)}{dx}+\frac{d(Fu)}{du}\cdot\frac{du}{dx}=0,\quad \frac{d(Fy)}{dy}+\frac{d(Fu)}{du}\frac{du}{dy}=0,$$

qui donnent

$$\frac{du}{dx}=-\frac{\frac{d(Fx)}{dx}}{\frac{d(Fu)}{du}};\quad \frac{du}{dy}=-\frac{\frac{d(Fy)}{dy}}{\frac{d(Fu)}{du}}.$$

On déduirait de là $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx\,dy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, etc.

On peut aussi rappeler immédiatement cette théorie à celle des fonctions d'une seule variable, en regardant u comme donnée en x et y, puis y comme une fonction indéterminée de x. Ainsi, $F(x, y, u)$ sera une fonction de trois variables, dont chacune sera fonction de x, et on aura (chap. V)

$$dF(x,y,u)=\frac{d(Fx)}{dx}dx+\frac{d(Fy)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}dx+\frac{d(Fu)}{du}\frac{du}{dx}dx=0,$$

à cause de $F(x, y, u)=0$. Mais u étant considérée comme une fonction de x et y, et y comme une fonction de x, la différentielle totale de u, par rapport à x, que nous avons représentée par $\frac{du}{dx}dx$, donne lieu à deux *différentielles partielles*, dont l'une est la différentielle de u, prise par rapport à x en dehors de y, savoir $\frac{du}{dx}dx$, et l'autre est celle de u, prise par rapport à la même variable x, en tant qu'elle est dans y, c'est-à-dire $\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}dx$;

Ainsi d $F(x, y, u) = 0$ devient, en ne retenant que le coefficient,

$$\frac{d(Fx)}{dx} + \frac{d(Fu)}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{d(Fy)}{dy} + \frac{d(Fu)}{du}\frac{du}{dy}\right) = 0.$$

Mais y étant regardé comme une fonction indéterminée de x, l'équation précédente doit avoir lieu, quelle que soit la fonction $\frac{dy}{dx}$; elle se décompose donc dans celles-ci,

$$\frac{d(Fx)}{dx} + \frac{d(Fu)}{du}\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{d(Fy)}{dy} + \frac{d(Fu)}{du}\frac{du}{dy} = 0,$$

trouvées précédemment.

Soit $u = ft$, t désignant une fonction connue de deux variables, telle que

$$t = F(x, y).$$

Les dérivées relatives aux variables x et y, indépendantes et considérées séparément, sont (pag. 54)

$$\frac{du}{dx} = p = f't \cdot \frac{dt}{dx}, \quad \frac{du}{dy} = q = f't \cdot \frac{dt}{dy}.$$

Si l'on divise l'une par l'autre ces deux équations, $f't$ disparaîtra, et on trouvera

$$p \cdot \frac{dt}{dy} = q\,\frac{dt}{dx},$$

relation qui exprime que u est une fonction de t, quelle que soit d'ailleurs la forme de cette fonction.

Par exemple,

$$u = f(x^2 + y^2)$$

donne

$$p = f'(x^2+y^2)\times 2x, \quad q = f'(x^2+y^2)2y,$$

d'où

$$py - qx = 0;$$

relation satisfaite par toute fonction de x^2+y^2. Ainsi, que pour u, on prenne $\log(x^2+y^2)$, $\sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}$, et on tombera toujours sur la relation

$$py - qx = 0:$$

Soit, pour second exemple :

$$u = f(ax+by)$$

dans laquelle la caractéristique f désigne une fonction dont la forme n'est déterminée en aucune manière : si l'on pose

$$t = ax + by$$

on aura

$$\frac{du}{dx} = f't\frac{dt}{dx}, \quad \frac{du}{dy} = f't\frac{dt}{dy}$$

où les deux fonctions $f't$ sont identiques : si pour $\frac{dt}{dx}$ et $\frac{dt}{dy}$ on substitue leurs valeurs a et b, et qu'on élimine $f't$ entre $\frac{du}{dx} = af't$ et $\frac{du}{dy} = bf't$, il viendra

$$b\frac{du}{dx} - a\frac{du}{dy} = 0 \ldots\ldots (1)$$

Cette équation devant devenir identique, lorsqu'on y substituera pour $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$ les valeurs données par la différentiation d'une fonction quelconque de $ax+by$, offrira un

caractère au moyen duquel on pourra reconnaître si tel polynome est ou non une fonction de $ax + by$. Prenons, par exemple, le polynome $a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$, et recherchons s'il est une fonction de $ax + by$: en le désignant par u, on a

$$\frac{du}{dx} = 2a^2x + 2aby, \quad \frac{du}{dy} = 2abx + 2b^2y:$$

ces valeurs substituées dans (1) rendent cette équation identique. En effet

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 = (ax + by)^2.$$

Soit encore l'équation donnée

$$u - ax - by - c = 0,$$

on en déduira celles-ci

$$\frac{du}{dx} - a = 0, \quad \frac{du}{dy} - b = 0$$

éliminant les deux constantes a et b entre ces trois équations, il viendra celle-ci du premier ordre

$$u - x\frac{du}{dx} - y\frac{du}{dy} - c = 0$$

dont la proposée sera l'intégrale complette, a et b étant les deux constantes arbitraires.

Si donc on n'a pour la détermination de u en x et y, qu'une équation du premier ordre entre $x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}$, l'intégrale complette devra contenir deux constantes arbitraires.

Considérons enfin l'équation

$$u - y\phi\left(\frac{x}{y}\right) - c = 0$$

φ étant une fonction quelconque de $\frac{x}{y}$: si on en déduit les deux équations dérivées

$$\frac{du}{dx}-y\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\times\frac{1}{y}=0,\ \frac{du}{dy}-\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+y\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\times\frac{x}{y^2}=0$$

et qu'entre ces trois équations on élimine $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ et $\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)$, on retombera sur l'équation

$$u-x\frac{du}{dx}-y\frac{du}{dy}-c=0.$$

Pour avoir le développement de la fonction

$$f(x+i,\ y+k,\ z+h),$$

x, y et z étant des variables indépendantes, on partira de celui de $f(x+i,\ y+k)$, dans lequel on supposera que la variable z, traitée jusque là comme une constante, se change en $z+h$, et alors les fonctions

$$\frac{du}{dx},\ \frac{du}{dy},\ \frac{d^2u}{dx^2},\ \frac{d^2u}{dx\,dy},\ \frac{d^2u}{dy^2},\ \text{etc.},$$

considérées comme fonctions de z seulement, puisqu'elle est la seule quantité qui doive varier, donneront lieu à autant de développemens qu'on formera d'après les règles exposées précédemment. Si l'on désigne toujours $f(x,\ y,\ z)$ par u, on trouvera

$$f(x+i,y+k,\ z+h)=u+\frac{1}{1}\left\{\frac{du}{dx}i+\frac{du}{dy}k+\frac{du}{dz}h\right\}$$
$$+\frac{1}{1.2}\left\{\begin{array}{l}\frac{d^2u}{dx^2}i^2+\frac{d^2u}{dx\,dy}.2ik+\frac{d^2u}{dy^2}k^2\\+\frac{d^2u}{dx\,dz}.2ih+\frac{d^2u}{dy\,dz}.2kh+\frac{d^2u}{dz^2}h^2\end{array}\right\}$$

$$+\frac{1}{1.2.3}\left\{\begin{array}{l}\frac{d^3u}{dx^3}i^3+\frac{d^3u}{dx^2dy}3i^2k+\frac{d^3u}{dxdy^2}3ik^2+\frac{d^3u}{dy^3}k^3\\ +\frac{d^3u}{dx^2dz}3i^2h+\frac{d^3u}{dxdydz}6ikh+\frac{d^3u}{dy^2dz}3k^2h\\ +\frac{d^3u}{dxdz^2}3ih^2+\frac{d^3u}{dydz^2}3kh^2+\frac{d^3u}{dz^3}h^3\end{array}\right\}$$

$$+\text{ etc.}$$

et pour la différentielle, qui est la somme des termes de première puissance des accroissemens,

$$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz,$$

après avoir changé i, k, h en dx, dy et dz. Les différentielles secondes, troisièmes, etc., sont les termes entre parenthèses dans le développement précédent, qu'on pourra conséquemment abréger, en écrivant

$$f(x+dx, y+dy, z+dz)=u+du+\frac{1}{1.2}d^2u+\frac{1}{1.2.3}d^3u+\text{ etc.}$$

Nous passerons à la démonstration du théorême des fonctions homogènes, annoncée dans le titre.

Si V *est une fonction homogène des variables* x, y, z, t, *etc., c'est-à-dire, une fonction telle que la somme des exposans des variables, soit constante et égale à* m *dans tous les termes, on a, pour cette fonction, la propriété suivante :*

$$mV=Xx+Yy+Zz+Tt+\text{ etc.},$$

les coefficiens X, Y, Z, T, *etc., étant ceux de la différentielle*

$$dV=Xdx+Ydy+Zdz+Tdt+\text{ etc.},$$

La fonction V peut se mettre sous cette forme

$$V = x^m f\left\{\frac{y}{x},\ \frac{z}{x},\ \frac{t}{x},\ \text{etc.}\right\}$$

où $f\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x},\ \frac{t}{x},\ \text{etc.}\right)$ est de dimension nulle. Si on différentie successivement, par rapport à toutes les variables, x^m, $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$, $\frac{t}{x}$, on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V = mf(\quad)x^{m-1}.\mathrm{d}x &+ x^m P \left\{\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2}\right\} \\ &+ x^m Q \left\{\frac{x\mathrm{d}z - z\mathrm{d}x}{x^2}\right\} \\ &+ x^m R \left\{\frac{x\mathrm{d}t - t\mathrm{d}x}{x^2}\right\} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

où $f(\quad)$ indique la fonction primitive, et P, Q, R, des coefficiens différentiels. Si on effectue les multiplications, et qu'on rassemble les termes multipliés par $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, etc., on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= \{mf(\quad)x^{m-1} - x^{m-2}yP - x^{m-2}zQ - x^{m-2}tR - \text{etc.}\}\mathrm{d}x \\ &\qquad + x^{m-1}P\mathrm{d}y + x^{m-1}Q\mathrm{d}z + x^{m-1}R\mathrm{d}t + \text{etc.} \\ &= \left\{mf(\quad)x^{m-1} - \frac{x^{m-1}yP}{x} - \frac{x^{m-1}zQ}{x} - \frac{x^{m-1}tR}{x} - \text{etc.}\right\}\mathrm{d}x \\ &\qquad + x^{m-1}P\mathrm{d}y + x^{m-1}Q\mathrm{d}z + x^{m-1}R\mathrm{d}t + \text{etc.}\ . \end{aligned}$$

Mais d'ailleurs

$$\mathrm{d}V = X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z + T\mathrm{d}t + \text{etc.},$$

donc

$$X = mf(\quad)x^{m-1} - \frac{x^{m-1}yP}{x} - \frac{x^{m-1}zQ}{x} - \frac{x^{m-1}tR}{x} - \text{etc.}$$

$$Y = x^{m-1}P,\quad Z = x^{m-1}Q,\quad T = x^{m-1}R,\ \text{etc.}$$

Remplaçant dans X les facteurs $x^{m-1}P$, $x^{m-1}Q$, $x^{m-1}R$, etc. par Y, Z, T, etc., on a

$$X = mf(\ \ )x^{m-1} - \frac{Yy}{x} - \frac{Zz}{x} - \frac{Tt}{x} - \text{etc.},$$

d'où l'on déduit enfin

$$Xx + Yy + Zz + Tt + \text{etc.} = mf(\ \ )x^m = mV,$$

ce qui est la propriété annoncée.

La fonction homogène $\frac{\sqrt{x+y}}{x^3+y^3}$ est de dimension $-\frac{11}{2}$, et elle a pour différentielle

$$\frac{-(5xy+6y^2)\,dx - (5xy+6x^2)\,dy}{2x^4y^4\sqrt{x+y}};$$

on doit donc avoir

$$\frac{-(5xy+6y^2)x - (5xy+6x^2)y}{2x^4y^4\sqrt{x+y}} = -\frac{11}{2}\,\frac{\sqrt{x+y}}{x^3+y^3}.$$

En effet, si l'on réduit, on trouvera cette identité

$$11x^2y + 11xy^2 = 11xy(x+y).$$

Cette fonction homogène $\frac{gx^2+hxy}{xy+by^2}$, qui est de dimension nulle, a pour différentielle

$$\frac{(gx^2y+2bgxy^2+bhy^3)\,dx - (gx^3+2bgx^2y+bhxy^2)\,dy}{(xy+by^2)^2},$$

et on a, en effet,

$$(gx^2y+2bgxy^2+bhy^3)x - (gx^3+2bgx^2y+bhxy^2)y = 0.$$

Pour une fonction de deux variables, homogène et de m dimensions, on a donc, en même tems,

$$dV = X\,dx + Y\,dy$$
$$mV = Xx + Yy;$$

de la seconde, on déduit

$$m\mathrm{d}V = \mathrm{d}(Xx + Yy) = m(X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y),$$

en observant que $\mathrm{d}V = X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y$. Si on prend les coefficiens différentiels, d'abord par rapport à x, ensuite par rapport à y, on aura

$$(m-1)X = y\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} + x\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x},$$

$$(m-1)Y = y\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y} + x\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y}.$$

Or $\mathrm{d}V$ étant la différentielle immédiate d'une fonction de deux variables, on a démontré que

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y};$$

donc

$$(m-1)X = y\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y} + x\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}$$

$$(m-1)Y = y\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y} + x\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}.$$

Donc les coefficiens différentiels X et Y d'une fonction homogène, de m dimensions, sont encore des fonctions homogènes, dont le nombre des dimensions est moindre d'une unité. On étendrait la proposition aux coefficiens différentiels successifs d'une telle fonction.

On pourrait encore démontrer réciproquement que X et Y étant des fonctions homogènes de $m-1$ dimensions, si d'ailleurs $X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y$ est la différentielle immédiate d'une fonction de deux variables, on doit avoir

$$m(X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(Xx + Yy).$$

Ces théorêmes sont dus à *Euler* qui les a donnés dans les Mémoires de l'Académie de Pétersbourg, pour les années 1734 et 1735.

CHAPITRE XIV.

Développement de f(x, y) *suivant les puissances de* x *et* y; *des limites du développement des fonctions de deux variables indépendantes; développement de* z *en série suivant* y, *d'après l'équation* z = x + yfz, fz *étant une fonction quelconque de* z.

REPRENONS le développement de $f(x+i, y+k)$ trouvé (chap. XIII), changeons x et y en $x-i$ et $y-k$, ce qui est permis, puisque x, y, i et k sont des quantités quelconques, puis remplaçons i et k par xt et yt : nous aurons

$$f(x,y)=f(x-xt, y-yt)+xt f'(x-xt, y-yt)$$
$$+yt f_{,}(x-xt, y-yt)+\frac{x^2t^2}{2}f''(x-xt, y-yt)$$
$$+xyt^2 f_{,}'(x-xt, y-yt)+\frac{y^2t^2}{2}f_{,,}(x-xt, y-yt)+\text{etc.}$$

en désignant par f', f'', f''', etc., les fonctions dérivées de f, prises par rapport à la seule variable x, et par $f_{,}$, $f_{,,}$, $f_{,,,}$, etc., celles qui ne sont relatives qu'à y, en sorte que la lettre f accentuée en haut et en bas, indique une suite de différentiations effectuées par rapport à x, en nombre égal à celui des accens supérieurs, et par rapport à y, en nombre égal à celui des accens inférieurs, différentielles dont on ne retient que les coefficiens, et qu'on prend dans un ordre quelconque.

Or, t est une quantité indéterminée qui, supposée égale à zéro, rendra l'équation identique, et qui étant faite $=1$, donnera

$$f(x,y)=f+xf'.+yf_{,}+\frac{x^2}{2}f''+xyf_{,}'.+\frac{y^2}{2}f_{,,}.+\text{etc.}$$

formule générale du développement de la fonction $f(x, y)$, suivant les puissances de x et y, dans laquelle les quantités désignées par f, $f'.$, $f_{,}.$, etc., dénotent des fonctions dérivées suivant $x=0$ et $y=0$. C'est l'extension du théorème de *Maclaurin* aux fonctions de deux, et par suite aux fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes.

M. *Lagrange*, dans *la Théorie des fonctions analytiques*, a démontré que λ étant un nombre indéterminé ou inconnu, toujours compris entre zéro et un, et qui devra être partout le même dans la même fonction, mais qui pourra être différent dans les différentes fonctions; on avait

$$f(x, y)=f.+xf'(\lambda x, \lambda y)+yf_{,}(\lambda x, \lambda y),$$

en s'arrêtant au premier terme; que si l'on en prenait trois, on avait

$$f(x,y)=f+xf'+yf_{,}+\frac{x^2}{2}f''(\lambda x, \lambda y)+xyf_{,}'(\lambda x, \lambda y)$$
$$+\frac{y^2}{2}f_{,,}(\lambda x, \lambda y);$$

que, pour six termes,

$$f(x,y)=f+xf'+yf_{,}+\frac{x^2}{2}f''+xyf_{,}'+\frac{y^2}{2}f_{,,}$$
$$+\frac{x^3}{2.3}f'''(\lambda x, \lambda y)+\frac{x^2y}{2}f_{,}''(\lambda x, \lambda y)+\frac{xy^2}{2}f_{,,}'(\lambda x, \lambda y)$$
$$+\frac{y^3}{2.3}f_{,,,}(\lambda x, \lambda y);$$

et ainsi de suite: il a prouvé aussi que

$$\begin{aligned} f(x+i,y+k) &= f(x,y) + if'(x+\lambda i, y+\lambda k) \\ &\quad + kf_{\prime}(x+\lambda i, y+\lambda k) \\ &= f(x,y) + if'(x,y) + kf_{\prime}(x,y) \\ &\quad + \frac{i^2}{2}f''(x+\lambda i, y+\lambda k) + ikf_{\prime}'(x+\lambda i, i+\lambda k) \\ &\quad + \frac{k^2}{2}f_{\prime\prime}(x+\lambda i, y+\lambda k) \\ &= \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f(x,y) + if'(x,y) + kf_{\prime}(x,y) \\ &+ \frac{i^2}{2}f''(x,y) + ikf_{\prime}'(x,y) + \frac{k^2}{2}f_{\prime\prime}(x,y) \\ &+ \frac{i^3}{2.3}f'''(x+\lambda i, y+\lambda k) + \frac{i^2k}{2}f_{\prime}''(x+\lambda i, y+\lambda k) \\ &+ \frac{ik^2}{2}f'_{\prime\prime}(x+\lambda i, y+\lambda k) + \frac{k^3}{2.3}f_{\prime\prime\prime}(x+\lambda i, y+\lambda k) = \text{etc.} \end{aligned}$$

La quantité λi répond, comme on voit, à celle qui a été désignée par j (pag. 170), et λh est son analogue. De ces formules généralisées, ou étendues à un nombre quelconque de variables, on conclut que

Lorsque dans le développement d'une fonction suivant les puissances et les produits de certaines quantités, on veut s'arrêter aux termes d'un ordre donné, c'est-à-dire, dans lesquels ces quantités forment des dimensions d'un degré égal à l'exposant de cet ordre, on peut supposer le reste du développement égal aux seuls termes de l'ordre suivant, mais en y conservant ces mêmes quantités sous la fonction, et les multipliant toutes par un coefficient λ compris entre zéro et un, et qui sera le même dans la même fonction, mais qui pourra être différent dans les différentes fonctions.

On peut parvenir à ces formules par une analyse sem-

blable à celle que nous avons donnée (pag. 166 et suiv.) pour les fonctions d'une seule variable. On posera

$$\begin{aligned}f(a,b)=f(a-x,b-y)+xf'(a-x,b-y)+\int x\mathrm{d}xf''(a-x,b-y)\\+yf_{\prime}(a-x,b-y)+\int(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)f_{\prime}'(a-x,b-y)\\+\int y\mathrm{d}xf_{\prime\prime}(a-x,b-y),\end{aligned}$$

parce qu'en différentiant de part et d'autre, c'est-à-dire, en faisant la somme des fonctions dérivées et par rapport à x et par rapport à y, on trouve $0=0$, ainsi qu'il est facile de le reconnaître. Maintenant, si on remplace, sous les signes $\int$, les fonctions $f''(a-x, b-x)$, $f_{\prime}'(a-x, b-y)$, $f_{\prime\prime}(a-x, b-y)$ par les plus grandes et les plus petites valeurs M et N, P et Q, R et S, qu'elles prennent depuis $x=0$ jusqu'à x, et depuis $y=0$ jusqu'à y, on conclura que $\int x\mathrm{d}xf''(a-x, b-y)$ est égal au produit de $\frac{x^2}{2}$ par une quantité comprise entre M et N, que .... $\int(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)f_{\prime}'(a-x, b-y)$ est égal à xy par une quantité comprise entre P et Q, et qu'enfin la troisième intégrale est $\frac{y^2}{2}$ par une quantité comprise entre R et S. Si l'on représente ces valeurs intermédiaires de f'', $f_{\prime}'$, $f_{\prime\prime}$ par $f''(a-(x-t), b-(y-u))$, $f_{\prime}'(a-(x-t), b-(y-u))$, $f_{\prime\prime}(a-(x-t), b-(y-u))$, t et u représentant des quantités comprises entre 0 et x, 0 et y, on aura

$$\begin{aligned}f(a,b)=f(a-x, b-y)+xf'(a-x, b-y)\\+yf_{\prime}(a-x, b-y)\\+\frac{x^2}{2}f''(a-(x-t), b-(y-u))\\+xyf_{\prime}'(a-(x-t), b-(y-u))\\+\frac{y^2}{2}f_{\prime\prime}(a-(x-t), b-(y-u))\end{aligned}$$

Que l'on change a en $a+x$, b en $b+y$, et cette identité deviendra

$$f(a+x,b+y)=f(a,b)+xf'(a,b)+\frac{x^2}{2}f''(a+t,b+u)$$
$$+yf_{\prime}(a,b)+xyf'_{\prime}(a+t,b+u)$$
$$+\frac{y^2}{2}f_{\prime\prime}(a+t,b+u).$$

Si l'on écrit x au lieu a, i au lieu de x, y au lieu de b, k au lieu de y, on trouvera enfin

$$f(x+i,y+k)=f(x,y)+if'(x,y)+\frac{i^2}{2}f''(x+t,y+u)$$
$$+kf_{\prime}(x,y)+ikf'_{\prime}(x+t,y+u)$$
$$+\frac{k^2}{2}f_{\prime\prime}(x+t,y+u).$$

où t est une quantité comprise entre zéro et i, et u une quantité entre zéro et k, en sorte que t et u reviennent à λi et λk; de plus, ces limites seront possibles, si les fonctions f'', $f'_{\prime}$, $f_{\prime\prime}$ ne deviennent pas infinies depuis o jusqu'à i, et depuis o jusqu'à k, en sorte que λ tombe entre zéro et un.

Soit proposée l'équation

$$z=x+yfz,$$

dans laquelle fz est une fonction quelconque de z: on demande la valeur de z en série, suivant les puissances de y.

Si l'on prend les dérivées suivant x et suivant y, on aura

$$\frac{dz}{dx}=1+yf'z\times\frac{dz}{dx},\quad \frac{dz}{dy}=fz+yf'z\times\frac{dz}{dy},$$

en notant par $f'z$ le coefficient de la différentielle de z par rapport à z: si, entre ces deux équations, on élimine $f'z$, on aura

$$\frac{dz}{dy}-\frac{dz}{dx}fz=0;$$

mais la proposée donne

$$fz = \frac{z - x}{y};$$

substituant donc cette valeur de fz dans la précédente, on obtiendra cette équation du premier ordre, délivrée de fz,

$$\frac{dz}{dx}(z - x) - y\frac{dz}{dy} = 0 \; . \; . \; . \; . \; (M)$$

Comme le premier terme de l'expression de z en série, est évidemment x, nous poserons, en général,

$$z = x + Ay + By^2 + Cy^3 + \text{etc.},$$

A, B, C, etc., étant des fonctions de x. Nous déduirons de là

$$\frac{dz}{dx} = 1 + A'y + B'y^2 + C'y^3 + \text{etc.},$$

A', B', C', etc., désignant les coefficiens des différentielles prises par rapport à x, des fonctions A, B, C, etc.; ensuite

$$\frac{dz}{dy} = A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 \text{ etc.}$$

Donc on aura, en substituant ces valeurs dans (M),

$$(1 + A'y + B'y^2 + C'y^3 + \text{etc.})\,(A + By + Cy^2 + \text{etc.})$$
$$- A - 2By - 3Cy^2 - 4Dy^3 - \text{etc.} = 0,$$

c'est-à-dire,

$$(AA' - B)y + (BA' + AB' - 2C)\,y^2$$
$$+ (CA' + BB' + AC' - 3D)\,y^3 + \text{etc.} = 0,$$

d'où l'on tire

$$B = AA',\; C = \tfrac{1}{2}(AB' + BA'),\; D = \tfrac{1}{3}(AC' + BB' + CA'),\; \text{etc.}$$

Ici, la quantité A demeure indéterminée; mais on observera que le premier terme de z étant x, la somme des deux premiers termes doit être $x+yfx$; donc $A=fx$, et de là $A'=f'x$, $B=fxf'x$, d'où $B'=fxf''x+(f'x)^2$, et conséquemment $C=\frac{1}{2}(2fx(f'x)^2+(fx)^2f''x)$, etc.; mais en examinant les expressions de B, C, etc., on voit d'abord qu'elles peuvent se mettre sous cette forme

$$B=\left(\frac{A^2}{2}\right)', \quad C=\tfrac{1}{2}(AB)', \quad D=\tfrac{1}{3}(AC+\tfrac{1}{2}B^2)',$$

$$E=\tfrac{1}{4}(AD+BC)' \text{ etc.},$$

en dénotant, en général, par $(\quad)'$ le coefficient de la différentielle prise par rapport à x, de la quantité renfermée entre les deux crochets; et si on fait les substitutions successives, on trouve que ces expressions sont réductibles à celles-ci qui sont plus simples,

$$B=\frac{1}{2}(A^2)', \quad C=\frac{1}{2.3}(A^3)'', \quad D=\frac{1}{2.3.4}(A^4)''' \text{ etc.}$$

en marquant par un, deux, trois, etc., accens, les coefficiens des différentielles première, seconde, troisième etc., prises par rapport à x, des quantités entre parenthèses; de sorte qu'en substituant la valeur de $A=fx$, on aura enfin

$$z=x+yfx+\frac{y^2}{2}((fx)^2)'+\frac{y^3}{2.3}((fx)^3)''$$
$$+\frac{y^4}{2.3.4}((fx)^4)'''+\text{etc.}$$

Supposons maintenant que ce soit, non plus z, mais une fonction quelconque de z, qu'on ait à développer suivant les puissances de y; soit φz cette fonction, et soit encore

$$z=x+yfz.$$

Si l'on pose $u = \varphi z$, on en déduira

$$\frac{du}{dx} = \varphi' z \cdot \frac{dz}{dx}, \quad \frac{du}{dy} = \varphi' z \cdot \frac{dz}{dy},$$

d'où l'on tire

$$\frac{du}{dx} : \frac{du}{dy} = \frac{dz}{dx} : \frac{dz}{dy}.$$

Si, dans cette égalité entre des quotiens, on substitue la valeur de $\frac{dz}{dx} : \frac{dz}{dy}$, tirée de l'équation

$$\frac{dz}{dx}(z - x) - y\frac{dz}{dy} = 0,$$

on aura cette équation du premier ordre

$$\frac{du}{dx}(z - x) - y\frac{du}{dy} = 0,$$

Supposons u

$$u = P + Qy + Ry^2 + Sy^3 + \text{etc.},$$

P, Q, R, etc., étant des fonctions de x; substituant cette valeur, ainsi que celle de z, trouvée ci-dessus, on aura

$$(P' + Q'y + R'y^2 + S'y^3 + \text{etc.})$$
$$(fx + \frac{y}{2}((fx)^2)' + \frac{y^2}{2.3}((fx)^3)'' + \text{etc.})$$
$$- Q - 2Ry - 3Sy^3 - \text{etc.}$$

d'où l'on tire

$$Q = P'fx, \quad 2R = Q'fx + \frac{P'}{2}((fx)^2)',$$

$$3S = R'fx + \frac{Q'}{2}((fx)^2)' + \frac{P'}{2.3}((fx)^3)'', \text{ etc.}$$

Or, en substituant successivement les valeurs de Q, R, etc., il est aisé de reconnaître que les expressions de ces quantités, peuvent se réduire à cette forme très-simple

$$Q = P'fx,\quad R = \frac{1}{2}(P'(fx)^2)',\quad S = \frac{1}{2.3}(P'(fx)^3)'' \text{ etc.}$$

La fonction P demeure indéterminée, à cause de l'élimination de la fonction φ; mais puisque $u = \varphi z = \phi(x + yfx + \text{etc.})$ il est visible, d'après le rapprochement des deux valeurs de u, qu'on aura $P = \varphi x$, et conséquemment $P' = \phi' x$; donc enfin

$$\phi z = \varphi x + y\varphi' x . fx + \frac{y^2}{2}(\varphi' x . (fx)^2)' + \frac{y^3}{2.3}(\varphi' x . (fx)^3)'' + \text{etc.}$$

formule très-remarquable, dit M. *Lagrange*, et d'un grand usage dans l'analyse, sur-tout pour le retour des suites. On remarquera que les deux relations

$$u = \varphi z,\quad z = x + yfz,$$

se changent dans celles-ci

$$u = fy,\quad y = a + x\varphi y,$$

en faisant $\varphi z = fy$, $x = a$, $y = x$, $fz = \varphi y$. Ces substitutions faites dans le développement précédent, donnent celui de u, trouvé (pag. 178). *Voy.* la *Théorie des fonctions analytiques.*

CHAPITRE XV.

Méthode des Tangentes.

SUIVANT les anciens géomètres, dit M. *Lagrange* dans la *Théorie des Fonctions*, une ligne droite est tangente d'une courbe, lorsqu'ayant un point commun avec la courbe, on ne peut mener par ce point aucune autre droite entre elle et la courbe. C'est par ce principe qu'ils ont déterminé les tangentes dans le petit nombre de courbes qu'ils ont considérées; mais depuis que, par l'application de l'algèbre à la géométrie, les courbes ont été soumises à l'analyse, on a envisagé les tangentes sous d'autres points de vue; on les a regardées comme des sécantes, dont les deux points d'intersection sont réunis, ou comme les prolongemens des côtés infiniment petits de la courbe considérée comme un polygone d'une infinité de côtés, etc., etc.

Dans le chapitre suivant, nous traiterons le problême des tangentes sous le premier point de vue : dans celui-ci, nous regarderons la tangente comme une sécante dont les deux intersections sont réunies.

Fig. 1. Soit une courbe $y = fx$ à laquelle on veuille mener une tangente en un point donné M : si, par ce point et par un autre point quelconque M', on mène une sécante SMM', on aura

$$\text{tang}\, M'Mm = \text{tang}\, MSP = \frac{M'm}{Mm} = \frac{k}{i} = y' + \frac{i}{2}y'' + \text{etc.},$$

k étant $iy' + \frac{i^2}{2}y'' + \text{etc.}$

Lorsque le point M' se réunit au point M, les accroissemens i et k sont nuls, la sécante devient la tangente MT, et tang MSP se change en tang MTP que nous désignerons par a; en sorte que

$$a = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x};$$

donc l'équation de la tangente sera

$$q - y = y'(p - x),$$

q et p étant les coordonnées des points de la tangente, et x et y ceux du point de la tangence.

Pour obtenir la sous-tangente PT, on fera $q = 0$, et on aura

$$-p + x = \frac{y}{y'};$$

Or, comme $-p$ représente AT dans un sens opposé à celui de $AP = x$, on conclura de l'égalité précédente,

$$\text{sous-tang} = \frac{y}{y'} = y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}.$$

Ainsi, de l'équation de la courbe, on déduira, par la différentiation, le $\mathrm{d}y$ sur $\mathrm{d}x$ qui sera donné au moyen de l'abscisse du point de tangence, et on en fera la substitution dans la valeur de a et dans l'expression de la sous-tangente.

Nous observerons que, pour un point donné d'une courbe, à l'exception des *points multiples* que nous considérerons plus loin, la sous-tangente est unique; qu'ainsi, son expression analytique ne doit pas contenir de quantités variables ou arbitraires; d'où il résulte que, pour passer de l'expression de la sous-sécante

$$PS = \frac{iy}{k} = \frac{y}{y' + \frac{i}{1.2}y'' + \text{etc.}},$$

à celle de la sous-tangente PT, il faut anéantir l'accroissement arbitraire qui porterait son indétermination dans la formule de la sous-tangente ; il faut donc ne retenir du développement précédent que le premier terme $y\dfrac{dx}{dy}$.

De l'équation de la tangente, on déduit de suite celle de la normale, en écrivant une ligne perpendiculaire à la tangente au point de contact : cette équation est donc

$$q-y=-\frac{dx}{dy}(p-x).$$

Pour avoir l'expression de la sous-normale PN, on fera $q=0$ dans l'équation précédente ; l'abscisse p correspondante sera AN, et comme $AP=x$, PN sera $p-x$; en sorte que

$$PN=\text{sous-norm}=y\frac{dy}{dx}.$$

On peut parvenir à ces deux résultats en menant une perpendiculaire MR à la sécante en M, tirant de la comparaison des triangles semblables MRP, $M'Mm$,

$$RP=\frac{yk}{i}=y\left(y'+\frac{i}{2}y''+\text{etc.}\right);$$

et faisant $i=0$ pour passer de la sous-perpendiculaire à la sécante, à la sous-perpendiculaire à la tangente ou à la sous-normale. Ainsi

$$NP=yy'=y\frac{dy}{dx}.$$

On passerait de même de la sous-sécante à la sous-tangente.

Dans les triangles rectangles TMP, PMN, on a

$$TM=\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2},\quad MN=y\sqrt{1+y'^2},$$

et en désignant par α l'angle de la tangente avec l'axe des abscisses

$$\sin\alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},\quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

parce que

$$a = \text{tang}\,\alpha = y'.$$

Nous rapporterons ici la méthode de *Fermat*, qu'on peut regarder, dit M. *Lagrange*, comme le premier inventeur des nouveaux calculs.

Dans l'équation entre l'abscisse et l'ordonnée, que *Fermat* appelle la propriété spécifique de la courbe, il augmente ou il diminue l'abscisse d'une quantitée indéterminée, et il regarde la nouvelle ordonnée comme appartenant à-la-fois à la courbe et à la tangente, ce qui fournit une équation qui, après les réductions, devient divisible par l'indéterminée; cette division faite, il supprime comme nuls tous les termes où se trouve cette indéterminée, et il obtient l'expression de la sous-tangente.

Ainsi, x étant l'abscisse, y l'ordonnée du point de tangence, et t la sous-tangente au même point, l'ordonnée à la tangente, pour l'abscisse $x+e$, est $y+\frac{ey}{t}$, ce qu'on trouve par les triangles semblables MPT, Mmm', en désignant Mm par e: cette ordonnée $y+\frac{ey}{t}$ doit être égale à celle de la courbe pour la même abscisse $x+e$. On aura donc l'équation dont il s'agit, en mettant dans l'équation de la courbe, $x+e$ à la place de x, et $y+\frac{ye}{t}$ à la place de y. Cette équation réduite et divisée par e, donne, en faisant $e=0$, la valeur de la sous-tangente.

Ainsi, l'équation de la parabole

$$y^2 = 2px,$$

devient, après les substitutions $x+e$ pour x et $y+\frac{ey}{t}$ pour y,

$$y^2+\frac{2ey^2}{t}+\frac{y^2e^2}{t^2}-2px-2pe=0;$$

donc, effaçant les termes y^2-2px, et divisant les autres par e, on aura

$$\frac{2y^2}{t}+\frac{y^2e}{t^2}-2p=0,$$

et effaçant encore le terme $\frac{y^2e}{t}$ qui s'évanouit, en faisant $e=0$, on aura l'équation

$$\frac{2y^2}{t}-2p=0,$$

de laquelle on tire

$$t=\frac{2y^2}{2p}=\frac{4px}{2p}=2x.$$

On voit l'analogie de la méthode de *Fermat* avec celle du calcul différentiel : car la quantité indéterminée dont il augmente l'abscisse x, est la différentielle dx, et l'augmentation correspondante $\frac{ye}{t}$ de l'ordonnée, est la différentielle dy.

On pourra faire l'application des formules précédentes aux courbes du second degré, représentées par l'équation générale

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

de laquelle on tirera, par la différentiation,

$$2Ay\frac{dy}{dx}+By+Bx\frac{dy}{dx}+2Cx+D\frac{dy}{dx}+E=0;$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{By + 2Cx + E}{2Ay + Bx + D},$$

et conséquemment

$$\text{sous-tang} = -y\,\frac{2Ay + Bx + D}{By + Cx + E},$$

$$\text{sous-norm} = -y\,\frac{By + 2Cx + E}{2Ay + Bx + D}.$$

Etant donnée l'équation

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots - Tx + V = 0 = y,$$

et a représentant une des valeurs approchées d'une des racines incommensurables, nous avons vu (Alg., 1re. sect.) que pour trouver une valeur plus approchée $a + b$, il fallait substituer $a + p$ pour x, p étant le complément de a à la racine x; alors, en observant que p est une fraction décimale comprise entre zéro et l'unité, on peut négliger les puissances de p supérieures à la première, en sorte que la transformée ordonnée par rapport aux puissances de p, se réduit à ses deux premiers termes, et donne

$$p = b = -\frac{(X)}{(Y)} = -\frac{y}{Y},$$

où (X) représente la proposée en y faisant $x = a$, et (Y) est, après la même substitution, le polynome

$$mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + \text{etc.} = \frac{dy}{dx},$$

en sorte que

$$b = -\frac{y\,dx}{dy},$$

c'est-à-dire, que b est la sous-tangente de la courbe

$$y = x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \dots - Tx + V,$$

au point où $x = a$. Donc $a + b$ n'est autre chose que l'abscisse, plus la sous-tangente correspondante, et il est visible que l'extrémité de cette sous-tangente peut, dans plusieurs cas, tomber plus loin de l'origine, par rapport à l'intersection de la courbe avec l'axe, que ne tombe l'extrémité de l'abscisse a, et alors $a + b$ excéderait la racine. On éviterait cet inconvénient en tirant la corde de l'arc dont les extrémités répondent aux deux abscisses qui sont les limites de la racine, ou aux deux abscisses qui représentent les substitutions qui ont donné des résultats de signes différens; en effet, cette corde traversant l'axe dans l'intervalle des limites, donnerait un point nécessairement plus voisin de l'intersection de la courbe avec l'axe, et de cette manière, on serait certain d'aller en approchant de la racine.

De l'expression de la sous-tangente, savoir

$$PT = y\frac{dx}{dy},$$

on déduit

$$AT = \frac{ydx}{dy} - x.$$

Pour avoir un second point de la tangente TM, on imaginera, par l'origine, une perpendiculaire AD jusqu'à la tangente, et on aura $AD = y - Mn$, c'est-à-dire,

$$AD = y - \frac{xdy}{dx}.$$

Ces valeurs de AT et AD sont données en x; on cherchera donc si elles prennent des valeurs finies, lorsque x est plus

grande que toute ligne donnée; dans ce cas, la courbe admet une asymptote déterminée de position par les valeurs de AT et AD, correspondantes à cette limite des valeurs de x : si l'une des quantités AT ou AD étant finie, l'autre est infinie, l'asymptote sera parallèle à l'axe sur lequel se porte la valeur infinie : si les valeurs de AT et AD sont infinies à-la-fois, la courbe n'admet pas d'asymptotes. Il pourrait encore arriver que ces quantités devinssent nulles en même tems; dans ce cas, la courbe aurait une asymptote passant par l'origine des coordonnées, dont la direction serait donnée par la valeur du $\frac{dy}{dx}$ qui répond à la limite des valeurs de x. Au reste, nous reviendrons bientôt sur cette question des asymptotes, pour la traiter avec toute la généralité qu'elle comporte.

CHAPITRE XVI.

Théorie des Contacts et des Développées des Courbes planes.

Pour considérer la question d'une manière générale, soit

$$y = fx$$

l'équation d'une courbe quelconque proposée, et

$$q = Fp$$

l'équation d'une ligne droite ou d'une autre courbe qu'on veut comparer à celle-là : x et y sont les coordonnées de la première courbe, p et q celles de la seconde, et toutes ces coordonnées sont rapportées à la même origine.

Pour que ces deux courbes aient un point commun relatif à l'abscisse x, il faut qu'en faisant l'abscisse $p = x$, les ordonnées soient égales, ou qu'on ait $q = y$.

Pour comparer maintenant le cours de ces courbes au-delà du point commun, on écrira dans leurs équations, $x + i$ pour x et pour p, et l'on aura $f(x + i)$, $F(x + i)$ pour les ordonnées des deux courbes qui répondent à la même abscisse, et qui sont éloignées de la quantité i de l'ordonnée au point commun. Donc la différence D de ces ordonnées sera... $f(x + i) - F(x + i)$, c'est-à-dire, qu'on aura

$$D = i(f'x - F'x) + \frac{i^2}{2}[f''(x + j) - F''(x + j)],$$

j étant une quantité indéterminée (pag. 170), mais renfermée entre les limites zéro et i.

Supposons maintenant que les deux courbes soient telles qu'on ait $f'x = F'x$; outre un point commun, elles prendront, en ce point, une tangente commune, puisque (chap. XV) $f'x$, $F'x$ expriment les tangentes trigonométriques des angles faits par les tangentes pour l'abscisse x avec une parallèle à l'axe des abscisses : on aura donc

$$D = \frac{i^2}{2}[f''(x+j) - F''(x+j)].$$

Ce rapprochement, pour $f''x = F''x$, deviendra

$$D = \frac{i^3}{2.3}[f'''(x+j) - F'''(x+j)],$$

et ainsi de suite, en prenant $f'''x = F'''x$ etc.

Il est visible que chacune de ces différences, pourra toujours être rendue plus petite que la précédente, abstraction faite des signes; car on pourra toujours déterminer i de telle manière qu'on ait, par exemple,

$$\frac{i^3}{2.3}[f'''(x+j) - F'''(x+j)] < \frac{i^2}{2}[f''(x+j) - F''(x+j)];$$

ce qui revient à satisfaire à l'inégalité

$$\frac{i}{3}[f'''(x+j) - F'''(x+j)] < [f''(x+j) - F''(x+j)],$$

où l'abscisse x est donnée, et j une quantité entre zéro et i; et il est visible aussi que cette condition ne peut avoir lieu pour une valeur déterminée de i, sans être remplie, à plus forte raison, pour des valeurs plus petites de i.

Supposons que dans l'équation

$$q = Fp,$$

Fig. 2. qui est celle de la courbe DMC, il entre n constantes ; la nature de cette courbe ne changera pas, si l'on fait varier ces constantes sans altérer la relation entre p, q et ces mêmes constantes ; seulement la courbe prendra une autre position, elle passera par d'autres points. Ainsi, la question de trouver, parmi toutes les courbes représentées par $q = Fp$, les n constantes comprises dans Fp, étant arbitraire, celle dont le cours s'approche le plus de celui de la courbe donnée HMB, représentée par $y = fx$, se réduira à déterminer les n constantes qui sont les élémens de position de la courbe DMC, de manière que les n premiers termes des deux développemens de $f(x+i)$, $F(x+i)$ deviennent égaux, ou de manière qu'on ait ces n égalités,

$$fx = Fx, \quad f'x = F'x, \quad f''x = F''x, \text{ etc.}$$

Dès-lors il sera impossible de faire passer entre les deux courbes DMC et HMB une troisième courbe dont l'équation $S = \varphi r$ renfermerait moins de n constantes arbitraires, cette courbe devant d'ailleurs avoir le point M commun avec les deux premières. Pour le démontrer, posons les trois développemens

$$f(x+i) = fx + if'x + \ldots\ldots\ldots + \frac{i^{n-1}}{1\ldots(n-1)} f^{(n-1)}x + \frac{i^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x+j);$$

$$F(x+i) = Fx + iF'x + \ldots\ldots\ldots + \frac{i^{n-1}}{1\ldots(n-1)} F^{(n-1)}x + \frac{i^n}{1.2\ldots n} F^{(n)}(x+j);$$

$$\varphi(x+i) = \varphi x + i\varphi'x + \ldots\ldots\ldots + \frac{i^{n-1}}{1\ldots(n-1)} \varphi^{(n-1)}x + \frac{i^n}{1.2\ldots n} \varphi^{(n)}(x+j),$$

la quantité j, toujours comprise entre zéro et i, pouvant n'être pas la même dans les trois développemens.

Si l'on désigne toujours par D la différence des deux premiers développemens, on aura, à raison de l'égalité des n premiers termes,

$$D = \frac{i^n}{1.2\ldots n}[f^n(x+j) - F^n(x+j)];$$

et si l'on note par Δ la différence entre le premier et le troisième développement, dont on ne peut égaler que les $n-1$ premiers termes, parce que φr ne contient que ce nombre de constantes arbitraires, on aura

$$\Delta = \frac{i^{n-1}}{2\ldots(n-1)}[f^{n-1}(x+j) - \varphi^{n-1}(x+j)].$$

Or la différence D pourra toujours être rendue moindre que Δ, abstraction faite des signes, puisqu'il suffira de prendre i tel qu'on ait

$$\frac{i}{n}[f^n(x+j) - F^n(x+j)] < f^{n-1}(x+j) - \varphi^{n-1}(x+j).$$

Considérons de nouveau les deux équations

$$r = fx, \qquad q = Fp,$$

dont la seconde renferme n constantes arbitraires, et supposons n nombre pair ; on pourra écrire la différence D ci-dessus ainsi qu'il suit

$$D = \frac{i^n}{1\ldots n}[f^{(n)}x - F^{(n)}x]$$
$$+ \frac{i^{n+1}}{1\ldots n(n+1)}[f^{n+1}(x+j) - F^{n+1}(x+j)],$$

et il en résulte que comme il est toujours possible de diminuer i à tel point qu'on ait

$$f^n x - F^n x > \frac{i}{n+1}[f^{n+1}(x+j) - F^{n+1}(x+j)],$$

le signe de D ne dépendra plus que de celui de i^n : ainsi lorsque la différence $f^n x - F^n x$ sera positive pour la valeur de x

qu'on considère, nécessairement, à droite et à gauche du point commun, et dans une très-petite étendue, la courbe
Fig. 2. *DMC* sera au-dessous de la courbe *HMB*; et, au contraire, elle sera au-dessus, si la différence $f^n x - F^n x$ est négative. Si n est impair, et que $f^n x - F^n x$ soit > 0, la courbe *DMC* sera au-dessous de *HMB*, à droite de *M*, et au-dessus à gauche, toujours en s'écartant très-peu dans les deux sens. Ainsi, quoique la courbe *DMC* touche la courbe *HMB* en *M*, cependant elle la coupe dans ce point. Nous reviendrons plus loin sur cette circonstance.

« A proprement parler, dit M. *Lagrange*, dans les *Fonc-* « *tions analytiques*, les courbes ne coïncident que dans le « point où les coordonnées sont égales; et l'égalité des deux, « trois, etc., premiers termes des développemens, ne les rend « pas plus coïncidentes dans d'autres points, mais elle les fait « approcher de manière qu'aucune autre courbe pour laquelle « le même nombre d'égalités n'aurait pas lieu, parce que le « nombre de ses constantes arbitraires ne le comporterait pas, « ou parce que quelques-unes d'elles resteraient indéterminées, « ne puisse passer entre les deux premières courbes. »

Le contact qui résulte des égalités $fx = Fx$, $f'x = F'x$ est dit : *contact simple*, ou *du premier ordre*. Le contact résultant des trois égalités $fx = Fx$, $f'x = F'x$, $f''x = F''x$, est dit : *du second ordre*. En général, deux courbes représentées par $y = fx$ et $q = Fp$, ont un *contact de l'ordre* $n - 1$, lorsque les n premiers termes des développemens de $f(x + i)$ et $F(x + i)$, sont égaux.

Nous allons éclaircir ces principes par quelques applications. Soit une courbe quelconque qui ait pour équation

$$y = fx,$$

et comparons-la avec la ligne droite

$$q = Fp = ap + b,$$

a et b étant les deux constantes qui en fixent la position. La condition d'un point commun, donnera $fx = Fx$, c'est-à-dire,

$$fx = ax + b,$$

équation qui servira à déterminer l'une des deux constantes a, b; l'autre sera fournie par la condition $f'x = F'x$, qui donnera

$$\frac{dy}{dx} = a.$$

La substitution de ces valeurs de a et de b dans l'équation de la droite, la changera dans celle d'une tangente à la courbe $y = fx$, au point dont les coordonnées sont x, y, en sorte qu'on aura cette équation de la tangente

$$q = \frac{dy}{dx}p + y - \frac{dy}{dx}x,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$q - y = \frac{dy}{dx}(p - x),$$

où x et y sont les coordonnées du point de tangence, et q et p les coordonnées générales de la tangente. C'est l'équation trouvée autrement dans le chapitre précédent.

Je dis que cette droite jouit de cette propriété qu'aucune autre droite ne pourra être menée entre elle et la courbe; car soit

$$s = \varphi r = hr + g$$

l'équation d'une autre droite quelconque; pour qu'elle passe par le même point commun, il faut que l'on ait aussi

$$\varphi x = fx,$$

et pour qu'elle puisse passer entre la courbe et la droite que

nous venons de considérer, il faudra, de plus, que l'on ait

$$\varphi' x = f' x.$$

Ces deux conditions donnent

$$g + hx = fx, \quad h = \frac{dy}{dx},$$

d'où l'on tire, pour les constantes h et g, les valeurs précédemment obtenues pour a et b ; de sorte que cette dernière droite coïncidera avec la première. Le contact le plus intime entre une courbe et une droite, est donc un *contact du premier ordre.*

On déduira aisément de là l'équation de la normale et les expressions de la sous-tangente et de la sous-normale.

Prenons maintenant le cercle pour le comparer avec la courbe proposée $y = fx$. Le cercle rapporté aux coordonnées rectangulaires p et q, p étant l'abscisse et q l'ordonnée, a pour équation

$$(q - b)^2 + (p - a)^2 = r^2,$$

où a et b sont les coordonnées du centre, et r le rayon. Ces constantes arbitraires étant au nombre de trois, il pourra y avoir, entre le cercle et la courbe, un *contact du second ordre.*

On tire de l'équation du cercle

$$q = b + \sqrt{\{r^2 - (p - a)^2\}} = Fp;$$

ainsi, la condition $fx = Fx$ donne

$$y = b + \sqrt{\{r^2 - (x - a)^2\}}.$$

On a ensuite $f'x = F'x$, c'est-à-dire, $\frac{dy}{dx} = \frac{d(Fx)}{dx}$, ou

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - a}{\{r^2 - (x - a)^2\}^{\frac{1}{2}}};$$

et enfin $f''x = F''x$, ou $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2(Fx)}{dx^2}$, qui donne

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r^2}{\{r^2-(x-a)^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

De la seconde équation on tire, en désignant $\frac{dy}{dx}$ par y',

$$\sqrt{\{r^2-(x-a)^2\}} = -\frac{x-a}{y'},$$

et de là

$$x-a = \frac{ry'}{\sqrt{1+y'^2}} \; \ldots \; (1)$$

La première donne

$$y-b = \sqrt{\{r^2-(x-a)^2\}} = -\frac{x-a}{y'} = -\frac{r}{\sqrt{1+y'^2}} \ldots (2)$$

La troisième, en y faisant $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$, et remplaçant.....

$\sqrt{r^2-(x-a)^2}$ par sa valeur $-\frac{x-a}{y'}$, ou par $-\frac{r}{\sqrt{1+y'^2}}$, devient

$$y'' = \frac{r^2(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^3} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{r};$$

d'où l'on déduit

$$r = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \; \ldots \; (3)$$

Substituant cette valeur de r dans (1) et (2), on trouvera

$$(4) \ldots\ldots a = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad b = y + \frac{1+y'^2}{y''} \ldots\ldots (5)$$

Les trois constantes a, b et r, qui entrent dans l'équation générale du cercle, étant ainsi déterminées, on en peut

conclure qu'aucun autre cercle ne pourra passer entre la courbe proposée et le cercle déterminé de position par ces valeurs de a, b et c. En effet, pour qu'un autre cercle $s=\varphi r$, rapporté aux coordonnées rectangulaires s et r, s étant l'ordonnée et r l'abscisse, pût passer entre la courbe et le cercle dont il s'agit, il faudrait que l'on eût

$$\varphi x=fx=y,\quad \varphi' x=f' x=\frac{dy}{dx},\quad \varphi'' x=f'' x=\frac{d^2y}{dx^2};$$

or, les constantes arbitraires étant, pour ce second cercle, g, h, k, en les déterminant d'après ces trois conditions, on aura, pour g, h et k, exactement les mêmes valeurs que pour a, b et c; par conséquent, le nouveau cercle coïncidera avec le premier, et n'en formera qu'un avec lui.

Le cercle ainsi déterminé, aura, avec la courbe $y=fx$, un *contact du second ordre*, et il jouira, relativement aux cercles, de la même propriété que la tangente à l'égard des lignes droites; par cette raison, les géomètres l'ont nommé *cercle osculateur*, ou *cercle de courbure*, parce qu'il sert à mesurer la courbure de la courbe au point de contact. Le rayon r de ce cercle se nomme *rayon de courbure*, parce que la courbure de la courbe au point de contact, est en raison inverse de la longueur de ce rayon; les quantités a et b sont les coordonnées du centre du cercle osculateur. Ainsi, on pourra toujours décrire le cercle osculateur en un point donné d'une courbe.

En regardant le rayon r comme donné dans l'équation du cercle, il ne reste plus d'arbitraires que a et b, pour lesquelles on a ces déterminations

$$a=x-\frac{ry'}{\sqrt{1+y'^2}},\quad b=y+\frac{r}{\sqrt{1+y'^2}};$$

en sorte que ce cercle est tel qu'entre lui et la courbe on ne

pourrait faire passer aucun autre cercle de même rayon. Ainsi ce cercle, quoiqu'ayant avec la courbe un contact moins intime que celui dont les coordonnées du centre et le rayon satisfont aux trois conditions

$$fx = Fx, \quad f'x = F'x, \quad f''x = F''x,$$

la touche cependant dans le point commun, puisqu'en ce point, la courbe et ce cercle ont même tangente, ce qui résulte de ce que le $\frac{dy}{dx}$ au point commun, est le même pour la courbe et le cercle.

Comme cette conclusion a lieu, quelle que soit la valeur du rayon r, on peut regarder le rayon r comme indéterminé dans les expressions ci-dessus de a et de b; alors, ces coordonnées appartiendront à une ligne droite dont l'équation résultera de l'élimination de r, opération qui donnera

$$b = y + \frac{x-a}{y'}, \quad \text{ou} \quad b - y = \frac{1}{y'}(x-a);$$

et après avoir remplacé b par q, et x par p,

$$q - y = -\frac{dx}{dy}(p-x).$$

Cette droite sera donc le lieu des centres de tous les cercles qui peuvent être tangens à la courbe au même point; elle sera donc normale à la courbe; et, en effet, nous retrouvons l'équation de la normale (pag. 216).

Si l'équation $y = fx$ devient celle des sections coniques qui ont un centre, et qui sont représentées par

$$y = (mx^2 + n)^{\frac{1}{2}},$$

on trouvera

$$r = \frac{\{m(1+m)x^2 + n\}^{\frac{3}{2}}}{mn},$$

$$a = x - \frac{rmx}{\{m(1+m)x^2 + n\}^{\frac{1}{2}}},$$

$$b = y - \frac{(mr^2x^2 + n)^{\frac{1}{2}}}{\{m(1+m)x^2 + n\}^{\frac{1}{2}}}.$$

On appelle *développée* la courbe qui est le lieu des centres des cercles osculateurs ; les coordonnées de cette courbe sont donc celles des centres de courbure, que nous avons désignées par a et b. Pour obtenir l'équation de cette développée, il faut, dans les expressions (4) et (5) de a et b, remplacer y, y', y'', par leurs valeurs en x, déduites de l'équation de la courbe, puis éliminer x : le résultat de cette élimination sera l'équation cherchée.

Faisons le calcul pour la parabole de l'équation

$$y^2 = mx;$$

en la résolvant par rapport à x, on a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{m}; \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{2}{m}.$$

Or les formules (4) et (5), rapportées à l'hypothèse de y variable principale, se changent dans celles-ci :

$$a - x = + \frac{1 + x'^2}{x''}, \quad b - y = - \frac{x'(1 + x'^2)}{x''};$$

on conclut de là

$$y - b = \frac{4y^3}{m^2} + y; \quad x - a = - \frac{m^2 + 4y^2}{2m}.$$

Mettant dans ces expressions pour y sa valeur $m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, il viendra

$$-b = \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}, \quad x - a = -2x - \frac{m}{2}, \text{ d'où } x = \tfrac{1}{3}\left(a - \frac{m}{2}\right).$$

Portant cette valeur de x dans b, on trouve, en faisant $m = 2p$,

$$b^2 = \frac{16}{27\,m}\left(a - \tfrac{1}{2}m\right)^3 = \frac{8}{27p}(a-p)^3,$$

équation à la développée de la parabole. Pour $a = p$ on a $b = 0$, en sorte que l'origine de cette développée est au foyer F de la courbe : pour porter l'origine des coordonnées en F, on fera $a - p = a'$, d'où résultera Fig. 3.

$$b^2 = \frac{8a'^3}{27p},$$

équation comprise dans $y^q = 2px^r$, qui représente une famille de courbes dont la parabole ordinaire n'est qu'un cas particulier. La précédente est une parabole du troisième degré formée de deux branches FD, Fd, symétriques par rapport à l'axe AX, et dont la première est le lieu des centres de courbure pour la branche AM, et la seconde est celui des centres pour la branche Am.

Pour mieux concevoir la nature des développées, en général, imaginons que d'un point quelconque C, et avec un rayon quelconque r, on décrive un très-petit arc de cercle mm', que l'on prolonge le rayon extrême $m'C$ d'une quantité quelconque CC', de manière à former un nouveau rayon r', et qu'avec ce rayon on décrive un nouvel arc $m'm''$, que l'on prolonge encore le rayon extrême $m''C'$ d'une quantité quelconque $C'C''$, de manière à former un troisième rayon r'', avec lequel on décrira un troisième arc $m''m'''$, et ainsi de suite; on formera une série d'arcs de cercle qui se toucheront par les extrémités, et dont les centres C', C'', C''', etc., seront les angles d'un polygone, qui aura pour côtés les différences $r' - r$, $r'' - r'$, $r''' - r''$, etc. Si on imagine ce polygone enveloppé d'un fil tel que la partie extrême soit dirigée Fig. 4.

suivant le premier côté CC' du polygone, et s'étende de la quantité r au-delà de ce polygone, il décrira, par son extrémité m, la suite des arcs que nous venons de considérer. Maintenant, plus les arcs seront petits, plus leur suite approchera d'une courbe continue dont ils seront les arcs osculateurs, et plus le polygone approchera de la courbe formée par les centres des circonférences osculatrices; ces deux courbes sont donc les limites des arcs et des polygones, et tout ce qui a constamment lieu dans ces suites, a lieu également pour ces courbes. On peut donc concevoir une courbe quelconque comme formée par le développement d'un fil qui enveloppe la courbe qui est le lieu des centres des cercles osculateurs. Nous avons dit qu'on nommait cette courbe *développée*, et la première est dite *développante*. On voit par là, 1°. qu'un arc quelconque de la développée est égal à la différence des deux rayons de courbure de la développante, correspondans aux deux extrémités de cet arc; 2°. que le rayon de courbure est tangent à la développée. Or, la développante étant une courbe algébrique, on aura, au moyen des formules précédentes, ses rayons de courbure et la nature de sa développée, exprimés algébriquement. On aura donc ainsi une infinité de courbes algébriques rectifiables, c'est-à-dire, telles qu'on poura assigner une ligne droite de même longueur qu'une portion quelconque de leur contour; c'est en quoi consiste la théorie des développées d'*Huyghens*, qu'on n'avait démontrée que par des considérations géométriques. Nous allons obtenir les mêmes conclusions par l'analyse.

A cet effet, nous reprendrons les équations

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \ldots \quad (1)$$

$$x-a+\frac{dy}{dx}(y-b)=0 \quad \ldots \quad (2)$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{d^2y}{dx^2}(y-b)=0 \quad \ldots \quad (3)$$

qui remplacent celles-ci

$$y = b + \sqrt{\{r^2 - (x-a)^2\}},$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-a}{\{r^2-(x-a)^2\}^{\frac{1}{2}}},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r^2}{\{r^2-(x-a)^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

trouvées (pag. 228 et 229). Si l'on différentie les deux premières, en observant que a, b et r varient avec x, on aura

$$(x-a)\left(1-\frac{da}{dx}\right)+(y-b)\left(\frac{dy}{dx}-\frac{db}{dx}\right)=r\frac{dr}{dx}\ldots\ldots(4),$$
$$1-\frac{da}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}(y-b)+\frac{dy}{dx}\left(\frac{dy}{dx}-\frac{db}{dx}\right)=0\ldots\ldots\ldots(5).$$

Or les équations (1), (2) et (3) ont lieu pour chaque point de la développante, et les équations (4) et (5) ont lieu pour la totalité de ces points; donc ces équations existent ensemble: mais l'équation (3) réduit (5) à

$$\frac{da}{dx}+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{db}{dx}=0\ldots\ldots(6),$$

et l'équation (2) réduit (4) à

$$-(x-a)\frac{da}{dx}-(y-b)\frac{db}{dx}=r\frac{dr}{dx}\ldots\ldots(7).$$

Si on élimine $\frac{dy}{dx}$ au moyen des équations (2) et (6), on aura celle-ci

$$(x-a)\frac{db}{dx}-(y-b)\frac{da}{dx}=0,$$

laquelle étant combinée avec (1) donne

$$x=a+\frac{r\frac{da}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{da}{dx}\right)^2+\left(\frac{db}{dx}\right)^2}},\quad y=b+\frac{r\frac{db}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{da}{dx}\right)^2+\left(\frac{db}{dx}\right)^2}}.$$

*

De plus, si on substitue ces valeurs de x et de y dans (7), on trouvera

$$\frac{dr}{dx}=\sqrt{\left\{\left(\frac{da}{dx}\right)^2+\left(\frac{db}{dx}\right)^2\right\}}.$$

Mais comme on peut prendre a pour variable principale, on remplacera (chap. VII, pag. 89), $\frac{dr}{dx}$, $\frac{da}{dx}$, $\frac{db}{dx}$, par $\frac{dr}{da}:\frac{dx}{da}$, $\frac{da}{da}:\frac{dx}{da}$, $\frac{db}{da}:\frac{dx}{da}$, les deux points indiquant un quotient; et multipliant de part et d'autre par $\frac{dx}{da}$, on trouvera

$$\frac{dr}{da}=\sqrt{\left\{1+\left(\frac{db}{da}\right)^2\right\}}.$$

Or, nous démontrerons (chap. XVII) que cette expression est celle du coefficient différentiel de l'arc d'une courbe ayant pour coordonnées a et b; en sorte que si l'on nomme s cet arc, on aura $dr=ds$, d'où résulte $r=s$, ou, plus généralement,

$$r=s+h,$$

h étant une constante qui disparaît par la différentiation. Ainsi, les rayons de courbure sont égaux aux arcs de la développée, augmentés d'une longueur constante h, et conséquemment *les rayons de courbure varient par les mêmes différences que les arcs de la développée.*

Fig. 5. En second lieu, l'angle que la tangente en un point N de la développée, fait avec l'axe, c'est-à-dire, l'angle NRX, a pour tangente trigonométrique $\frac{db}{da}$, en désignant par a et b les coordonnées AP, PN; cette tangente rapportée à x variable principale, est donc exprimée par le rapport

$\frac{db}{dx}$; $\frac{da}{dx}$: d'ailleurs le rayon NM du cercle osculateur en M à la courbe AL, dont les coordonnées sont x et y, étant perpendiculaire à la tangente en M, la tangente trigonométrique de l'angle MRX a pour expression (pag. 216) $-\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$; or l'équation (6) donne

$$\frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} = -1 : \frac{dy}{dx}.$$

Il est donc démontré que *la droite qui est tangente à la développée, est normale à la développante, ou réciproquement.*

Nous ferons une autre application de la théorie exposée dans ce chapitre et dans le précédent, à la courbe célèbre connue sous le nom de *Roulette*, ou de *Cycloïde*. On ne sait pas au juste quel est celui qui, le premier, en a remarqué la génération, mais il est certain que les Français sont les premiers qui se soient livrés à la recherche de ses propriétés.

La *cycloïde* est la courbe décrite par l'un des points de la circonférence d'un cercle qui roule sur une ligne droite. Fig. 6.

Nous pouvons supposer l'origine de la cycloïde en A, en sorte que le cercle, dans sa première position, touche en ce point la droite AX. D'après la loi de génération, le cercle, en roulant, applique successivement tous les points de sa circonférence sur la droite AX, d'où il résulte que lorsque le cercle générateur est dans une position quelconque QMG, la distance AQ entre les deux points de contact, est égale à l'arc MQ compris entre le point décrivant M, qui était d'abord en A, et le point de contact Q. Lorsque le point décrivant est revenu sur l'axe AX en L, AL est la circonférence du cercle générateur, rectifiée, et la trace de ce point est la cycloïde $AMKL$ dont il s'agit de trouver l'équation.

Or, $AP = x$, $PM = y$ étant les coordonnées du point M, la loi de génération que nous venons d'énoncer, se traduit ainsi :

$$x = AQ - PQ = \text{arc } MnQ - MN;$$

c'est-à-dire,

$$x = \text{arc (sin verse} = QN) - MN,$$

ou

$$x = \text{arc (sin verse} = y) - \sqrt{2ay - y^2},$$

en désignant par a le rayon du cercle générateur. Telle est l'équation finie de la cycloïde, qui est transcendante, puisqu'elle renferme une ligne trigonométrique.

Mais l'arc MnQ peut être désigné par son sinus MN, qui est $\sqrt{2ay - y^2}$, en sorte qu'on a ainsi

$$x = \text{arc (sin} = \sqrt{2ay - y^2}) - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Or (pag. 43)

$$\text{d (arc (sin} = \sqrt{2ay - y^2})) = \frac{a\,\text{d}y}{\sqrt{2ay - y^2}} \text{ (*)};$$

(*) En partant de $y = \sin x$, nous avons trouvé (chap. IV) .... $\frac{\text{d}y}{\text{d}x} = \cos x$, pour le rayon $= 1$; donc, pour le rayon $= r$, on aura $\frac{\text{d}y}{\text{d}x} = \frac{\cos x}{r}$, et conséquemment la différentielle de arc $(\sin = x)$ étant $\frac{\text{d}x}{\sqrt{1 - xx}}$ pour le rayon $= 1$, sera $\frac{r\text{d}x}{\sqrt{r^2 - xx}}$ pour le rayon r; or, dans le cas dont il s'agit, $x = \sqrt{2ay - y^2}$, et conséquemment .... $\text{d}x = \frac{(a - y)\,\text{d}y}{\sqrt{2ay - y^2}}$; d'ailleurs $\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - 2ay + y^2} = a\;\; y$; donc $\frac{r\text{d}x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, ou $\frac{a\text{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ deviendra $\frac{a\text{d}y}{\sqrt{2ay - y^2}}$.

D'ailleurs,

$$d\sqrt{2ay-y^2}=\frac{(a-y)\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}};$$

donc l'équation différentielle de la cycloïde est

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{y}.=\sqrt{\frac{2a-y}{y}}.$$

En changeant, dans cette équation, x en $a\pi-x$, $a\pi$ étant la demi-circonférence du cercle générateur, et y en $2a-y$, on aurait pour équation

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{y}{2a-y}}.$$

En partant de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{2a-y}{y}},$$

on trouve

$$\text{sous-tang}=\frac{ydx}{dy}=\frac{yy}{\sqrt{2ay-yy}},$$

et

$$\text{sous-norm}=\frac{ydy}{dx}=\sqrt{2ay-yy}.$$

Ces deux valeurs sont faciles à construire : en effet, à cause de $QN=MP=y$, l'ordonnée MN du cercle générateur, est $=\sqrt{2ay-yy}$; ainsi, $PQ=MN$ étant la sous-normale, la corde MQ de l'arc MnQ sera la normale, et conséquemment la tangente MT sera le prolongement de la corde MG qui sous-tend l'arc supplément de MnQ.

On pourra rapporter ce point M sur le cercle fixe qmg,

de même rayon que le cercle générateur, ce qui se fera en tirant la droite Mm parallèle à AX; alors, si on mène MT parallèle à mg, et MQ parallèle à mq, on aura la tangente et la normale en M.

Passons maintenant à la recherche du rayon de courbure. Nous avons déja

$$\frac{dx}{dy}=x'=\frac{y}{\sqrt{2ay-y^2}};$$

on déduit de là

$$\frac{d^2x}{dy^2}=x''=\frac{\sqrt{2ay-y^2}-\frac{y(a-y)}{\sqrt{2ay-y^2}}}{2ay-y^2}=\frac{ay}{(2ay-y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Faisant ces substitutions dans l'expression du rayon de courbure

$$r=\frac{\left(1+\frac{1}{x'^2}\right)^3}{-\frac{x''}{x'^3}}=-\frac{(1+x'^2)^{\frac{3}{2}}}{x''},$$

rapportée à l'hypothèse de y variable principale (page 82), on trouvera

$$r=-2^{\frac{3}{2}}(ay)^{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2ay}.$$

Ce résultat montre que le rayon de courbure MM' est double de la normale MQ, et qu'ainsi sa plus grande valeur est le double du diamètre du cercle générateur, diamètre qui est en même tems l'ordonnée et la normale au point K pour lequel la tangente devient parallèle à l'axe AX.

Les formules $x-a$, $y-b$, toujours rapportées à l'hypothèse de y variable principale, deviennent, après les substitutions faites pour x' et x'' de leurs valeurs trouvées

(pag. 282), et les réductions

$$x - a = -2\sqrt{2ay - yy}, \quad y - b = 2y,$$

d'où l'on tire

$$y = -b, \quad x = a - 2\sqrt{-2ab - bb}.$$

Ces valeurs de x et de y, rapportées dans l'équation de la cycloïde en quantités finies, la changent dans celle-ci

$$a - 2\sqrt{-2ab - bb} = \text{arc}(\sin\text{vers} = -b) - \sqrt{-2ab - bb},$$

qui devient

$$a = \text{arc}(\sin\text{vers} = -b) + \sqrt{-2ab - bb}.$$

d'où on conclut que la développée de la cycloïde, n'existe que pour des ordonnées négatives. On changera donc le signe de b, et l'équation précédente deviendra

$$a = \text{arc}(\sin\text{vers} = b) + \sqrt{2ab - bb},$$

équation qui se rapproche, par sa forme, de celle de la cycloïde.

Pour $b = 0$, on trouve $a = 0$; ainsi, la développée touche l'axe AX à l'origine A des coordonnées : pour $b = 2a$, on a $a = AI = \frac{1}{2}AL = \pi$, π étant la demi-circonférence du cercle générateur, en observant que l'arc qui a pour sinus verse le diamètre, est la demi-circonférence. Donc, si l'on prolonge KI au-dessous de l'axe AL d'une longueur $IA' = IK$ diamètre du cercle générateur, le point A' sera à la développée : on pourra transporter l'origine des coordonnées a et b à ce point A', et, pour cela, il faudra supposer $a = AI - IE = \pi - A'P' = \pi - a'$, $b = EP' - P'M' = IA' - P'M' = 2a - b'$: ces substitutions faites dans la dernière équation, donneront

$$\pi - a' = \text{arc}(\sin\text{vers} = (2a - b')) + \sqrt{(2ab' - b'b')},$$

d'où l'on tire

$$a' = \pi - \text{arc}\,(\sin \text{vers} = (2\alpha - b')) + \sqrt{(2\alpha b' - b'b')}.$$

Or, l'arc qui a pour sinus verse $2\alpha - b'$, c'est-à-dire, $EM' = QN'$, est $Qn'M'$, et π — cet arc, est l'arc $M'p'Q'$ qui a $N'Q'$ ou b' pour sinus verse; ainsi

$$a' = \text{arc}\,(\sin\,(\text{vers} = b')) - \sqrt{2\alpha b' - b'b'},$$

équation d'une cycloïde dont l'origine est en A', décrite sur l'axe $A'B'$ par le même cercle générateur, mais en supposant d'abord le point M' en A', et le cercle roulant de A' vers B'.

La même conséquence peut se déduire de la longueur MM' du rayon de courbure trouvée ci-dessus, et exprimée par $2\sqrt{2\alpha y} = 2MQ$; car si l'on prolonge GQ d'une quantité $QQ' = GQ$, qu'on mène par Q' la droite $A'B'$ parallèle à AL, et qu'on joigne $M'Q'$, on formera les triangles GMQ, $QM'Q'$ égaux entre eux; l'angle $QM'Q$ sera donc droit, et si on décrit sur QQ', comme diamètre, un cercle, il passera par M', et sera égal au cercle générateur; car puisque l'arc $M'p'Q'$ est le supplément de l'arc $M'n'Q$ qui est égal à l'arc MQ, on aura

$$\begin{aligned} \text{arc}\ M'p'Q' &= QnMG - \text{arc}\ MnQ \\ &= AI - AQ = QI = AQ'. \end{aligned}$$

L'expression du rayon de courbure de la cycloïde étant algébrique, la cycloïde est rectifiable; la longueur de l'arc $AM'A'$, ou de l'arc égal AMK, est $A'K$, c'est-à-dire, le double du diamètre du cercle générateur, comme on peut s'en assurer, en faisant dans l'expression d'un rayon de courbure, l'ordonnée $y = IK = 2\alpha$, auquel cas, $r = 2.2\alpha$.

Actuellement, il importe de faire connaître comment on détermine l'équation d'une courbe qui en touche une infinité

d'autres d'une nature donnée et assujéties à se succéder suivant une loi connue.

Pour fixer les idées, concevons qu'un cercle variable de rayon, se meuve dans son plan, de manière que le centre se trouve toujours sur une courbe ayant pour équation $y = \varphi x$, où φ est le signe d'une fonction donnée. L'équation du cercle étant

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2,$$

les coordonnées α et β du centre seront liées par l'équation $\beta = \varphi\alpha$, en sorte que la précédente pourra être écrite ainsi

$$(x-\alpha)^2 + (y-\varphi(\alpha))^2 = r^2 \ldots\ldots (m)$$

Or, si l'abscisse α reçoit un accroissement infiniment petit $d\alpha$, le cercle, qui ne changera pas de grandeur, prendra une position infiniment voisine de la première, et sa circonférence coupera la première en deux points dont les coordonnées x, y seront communes aux deux circonférences, et, par conséquent, ne varieront pas en passant d'une circonférence à une autre. Si on passe, de la même manière, de cette seconde position du cercle à la troisième, et ainsi de suite, le système de tous les points d'intersection qu'on obtiendra d'un même côté de la ligne des centres, formera une courbe qui sera celle de contact cherchée. Pour en avoir l'équation, il faudra donc différentier l'équation (m) par rapport à α seulement, ce qui revient à considérer toutes les positions consécutives du cercle, puis égaler à zéro le coefficient de cette différentielle, et enfin éliminer α entre ces deux équations. Le résultat de l'élimination offrira une relation entre x et y, indépendante de la position du centre de tous les cercles enveloppés.

Soit, en général, $V = f(x, y, \alpha) = 0$, l'équation de la courbe génératrice, et dans laquelle α est une constante arbitraire, on aura ces deux équations

$$V=0, \quad \frac{dV}{d\alpha}=0,$$

entre lesquelles on éliminera α pour obtenir l'équation de la courbe qui touche toutes celles que l'on obtient en donnant à α toutes les valeurs possibles dans l'équation $V=0$.

Eclaircissons cette théorie par un exemple, et proposons-nous *de trouver la courbe qui touche à-la-fois une suite de cercles de même rayon, et dont les centres sont sur une même circonférence donnée par* $X^2+Y^2=\rho^2$.

La relation entre les coordonnées α et β du centre, est donc $\alpha^2+\beta^2=\rho^2$, et le cercle variable de position a pour équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\sqrt{\rho^2-\alpha^2})^2-r^2=V=0 \quad . \ . \ . \ . \ (1)$$

de là on déduit, par la différentiation

$$-x\sqrt{\rho^2-\alpha^2}+\alpha y=\frac{dV}{d\alpha}=0;$$

et par suite,

$$\alpha=\frac{x\rho}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \beta=\frac{y\rho}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Mettant dans (1) pour α sa valeur, ou dans . . . . $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$, pour α et β, leurs valeurs, et faisant, pour simplifier, $x^2+y^2=z^2$, on aura

$$z^2-2\rho z+\rho^2=r^2;$$

d'où l'on tire

$$z=\rho\pm r, \quad z^2=(\rho\pm r)^2,$$

ou enfin

$$x^2+y^2=(\rho\pm r)^2,$$

c'est-à-dire, que les deux courbes de contact cherchées sont des cercles dont le centre commun est à l'origine des coordonnées, et dont les rayons sont $\rho + r$ et $\rho - r$.

On pourra encore appliquer ces principes à la recherche de l'équation des *caustiques par réflexion et par réfraction.* Nous nous bornerons à donner la loi de génération de la première de ces courbes. Si d'un point lumineux situé dans le plan d'une courbe, partent des rayons de lumière en nombre infini, et que ceux qui frappent cette courbe, soient réfléchis de manière que l'angle de réflexion soit égal à l'angle d'incidence, il existera une autre courbe qui sera touchée par tous ces rayons réfléchis, et que l'on a nommée caustique par réflexion (*Recueil de diverses propositions de Géométrie, par* Puissant).

La théorie que nous venons de donner sur le contact des courbes, n'est qu'une suite de la théorie générale du développement des fonctions; mais nous avons vu qu'il y a des cas particuliers où ce développement échappe à la forme générale, et que ces cas sont ceux où une valeur donnée de x, rend infinis les coefficiens différentiels (chap. IX). Alors le développement contiendra nécessairement, pour cette valeur de x, d'autres puissances de i que les simples puissances i^2, i^3, etc. Quoique ces exceptions ne portent aucune atteinte à la théorie générale que nous venons d'exposer, il est nécessaire, pour ne rien laisser à desirer sur ce point, de voir comment elle doit être modifiée dans les cas particuliers dont il s'agit.

Supposons donc que, pour $x = a$, la fonction $f(x + i)$, développée en une série ascendante de i, soit de la forme $fa + Ai^{\lambda} + Bi^{\lambda+\mu} + Ci^{\lambda+\mu+\nu} +$ etc., μ, ν, etc., étant toujours des nombres positifs. On pourra trouver les coefficiens A, B, C, etc., ainsi que les exposans λ, μ, ν, etc.,

par une méthode semblable à celle qui a été indiquée (chap. I). On fera d'abord

$$f(a+i) = fa + Pi^{\lambda},$$

et on prendra pour i^{λ}, la plus haute puissance de i, qui divisera $f(a+i) - fa$, après les réductions convenables, de manière que le quotient P ne devienne ni nul ni infini pour $i = 0$. Lorsque $a = 0$, l'exposant λ pourra être négatif, ce qui arrivera, par exemple, dans le cas de . . . . $fx = \{x \times (x+b)^2\}^{-\frac{5}{2}}$, qui, pour $x = 0 + i$ devient . . . $f(0+i) = i^{-\frac{5}{2}}(b+i)^{-5}$; dans tout autre cas, il sera évidemment toujours positif. On fera ensuite

$$P = A + Qi^{\mu}.$$

A étant la valeur de P, lorsque $i = 0$, et on prendra pour i^{μ} la plus haute puissance de i, qui divisera $P - A$, de manière que le quotient Q ne devienne ni nul, ni infini, lorsque $i = 0$. On continuera en supposant

$$Q = B + Ri^{\nu},$$

B étant la valeur de Q lorsque $i = 0$, et ainsi de suite.

On aura, de cette manière,

$$\begin{aligned} f(a+i) &= fa + Pi^{\lambda} \\ &= fa + Ai^{\lambda} + Qi^{\lambda+\mu} \\ &= fa + Ai^{\lambda} + Bi^{\lambda+\mu} + Ri^{\lambda+\mu+\nu}. \end{aligned}$$

etc.

Cela posé, considérons la courbe représentée par l'équation $y = fx$, x étant l'abscisse et y l'ordonnée; et supposons que le point ayant l'abscisse a, lui soit commun avec une autre courbe dont l'ordonnée soit Fx, en sorte que l'on ait

$$Fa = fa.$$

Au-delà de ce point, les ordonnées des deux courbes, seront $f(a+i)$, $F(a+i)$ pour une abscisse quelconque $a+i$, et leur différence que nous désignerons par D, sera

$$D=f(a+i)-F(a+i).$$

Développons la fonction $F(a+i)$ comme la fonction $f(a+i)$, et soit

$$\begin{aligned}F(a+i) &= Fa+pi^{\varrho}\\ &= Fa+\alpha i^{\varrho}+qi^{\varrho+\sigma}\\ &= Fa+\alpha i^{\varrho}+\beta i^{\varrho+\sigma}+ri^{\varrho+\sigma+\tau}.\end{aligned}$$

ϱ, σ, τ, etc. étant des nombres positifs, α, β, γ, etc., étant les valeurs de p, q, etc., lorsque $i=0$.

On aura d'abord, à cause de $Fa=fa$,

$$D=Ai^{\lambda}-\alpha i^{\varrho}+Qi^{\lambda+\mu}-qi^{\varrho+\sigma}.$$

Les deux premiers termes du développement de $f(a+i)$ étant $fa+Ai^{\lambda}$, et ceux du développement de $F(a+i)$ étant $Fa+\alpha i^{\varrho}$, supposons qu'ils deviennent égaux, ou qu'on ait, outre $fa=Fa$, ces deux conditions $\lambda=\varrho$, $A=\alpha$; la première dépendra de la nature des fonctions f, F; mais la seconde, ainsi que celle-ci $fa=Fa$, pourra toujours être remplie par le moyen des constantes arbitraires qui entreront dans Fx; on aura donc, dans ce cas,

$$D=Qi^{\lambda+\mu}-qi^{\varrho+\sigma},$$

et il sera impossible qu'aucune autre courbe passe entre les deux courbes dont il s'agit, dans le même point qui répond à l'abscisse a, à moins que les deux premiers termes du développement de $\varphi(a+i)$, φx étant l'ordonnée de cette autre courbe, ne soient aussi les mêmes que ceux du développement de $f(a+i)$.

Car s'ils sont différens, ils ne pourront pas se détruire dans l'expression de la différence Δ des deux ordonnées $f(a+i)$ et $\varphi(a+i)$, et l'on aura, en général,

$$\Delta = Ai^{\lambda} - \alpha' i^{\rho'} + Qi^{\lambda+\mu} + Ui^{\rho'+\sigma'},$$

à cause de $\varphi = f$ par la condition supposée de la coïncidence des courbes dans le point qui répond à $x = a$. Cette expression de Δ étant comparée à celle de

$$D = Qi^{\lambda+\mu} - qi^{\rho+\sigma},$$

il est facile de voir que les exposans μ, σ, ν étant nécessairement positifs par la nature du développement, il sera toujours possible de prendre i assez petit pour que la valeur de Δ surpasse celle de D, abstraction faite des signes, tant qu'on n'aura pas $\rho' = \lambda$, $\alpha' = A$, comme dans les deux premières courbes. Donc, dans tout autre cas, la troisième courbe passera nécessairement en dehors des deux autres.

En poussant plus loin le développement des fonctions.... $f(a+i)$, $F(a+i)$, on prouvera de la même manière que si les trois premiers termes du développement de ces fonctions sont les mêmes, aucune autre courbe ne pourra passer entre celles-là, à moins qu'elle n'ait les mêmes trois premiers termes, et ainsi de suite.

On pourra donc appeler aussi *contact du premier ordre*, *contact du second ordre*, etc., les rapprochemens de deux courbes pour lesquels les deux premiers termes, les trois premiers termes, etc., seront les mêmes dans les développemens des fonctions qui représentent les ordonnées.

Ainsi, la courbe $y = fx$ étant donnée, la courbe la plus simple qui aura avec elle un contact du premier ordre au point où $x = a$, sera représentée par l'équation

$$y = fa + A(x-a)^{\lambda},$$

et celle qui aura un contact du second ordre, le sera par

$$y = fa + A(x-a)^{\lambda} + B(x-a)^{\lambda+\mu},$$

et ainsi de suite. Car en substituant $a+i$ pour x, on aura simplement les deux premiers termes $fa + Ai^{\lambda}$, ou les trois premiers $fa + Ai^{\lambda} + Bi^{\lambda+\mu}$, ou etc., du développement de $f(a+i)$. Ces courbes auront donc aussi, dans le même point, le cours le plus approchant de celui de la courbe proposée, et pourront, par conséquent, servir à en faire connaître les propriétés, comme les points d'inflexion, de rebroussement, etc., points que nous considérerons en particulier dans l'un des chapitres suivans.

Supposons maintenant que dans l'équation $y = fx$ de la courbe, on substitue $\frac{1}{i}$ à la place de x, et qu'on développe la fonction $f\frac{1}{i}$ en une série ascendante de la forme...... $Ai^{\lambda} + Bi^{\lambda+\mu} + Ci^{\lambda+\mu+\nu} +$ etc.; si on fait la même chose à l'égard de l'équation $y = F\frac{1}{i}$ d'une autre courbe, et que les premiers termes du développement de $F\frac{1}{i}$, soient les mêmes que ceux du développement de $f\frac{1}{i}$, on pourra prouver, par un raisonnement semblable à celui qui a été fait ci-dessus, qu'on pourra toujours prendre i assez petit, pour qu'aucune autre courbe représentée par $y = \varphi x$, et dont la fonction $\varphi\frac{1}{i}$, développée de même en série ascendante, n'aurait pas autant de termes identiques avec ceux de ces courbes, ne puisse passer entre ces mêmes courbes dans les points qui répondent à l'abscisse $\frac{1}{i} = x$, et à toutes les abscisses

x plus grandes à l'infini, puisque dès que la condition qui peut empêcher que cette courbe ne passe entre les deux autres, aura lieu pour une certaine valeur de i, elle aura lieu, à plus forte raison, pour toutes les valeurs plus petites de i.

D'où l'on peut conclure que la courbe dont l'équation sera simplement $y = Ai^{\lambda}$, $y = Ai^{\lambda} + Bi^{\lambda+\mu}$ etc., ou $y = Ax^{-\lambda}$, $y = Ax^{-\lambda} + Bx^{-\lambda-\mu}$, etc., ira en s'approchant continuellement de la courbe proposée, à mesure que les abscisses x deviendront plus grandes, mais sans pouvoir jamais l'atteindre, de manière qu'elle parviendra à un terme, passé lequel aucune autre courbe du même genre qui ne sera pas d'un degré plus haut, ou dont l'équation ne renfermera pas plus de constantes, ne pourra passer entre les deux courbes. Cette seconde courbe sera donc une asymptote de la première, et cette idée de l'asymptote est, dit M. *Lagrange*, la plus simple et la plus générale qu'on en puisse donner, en même tems qu'elle est aussi la plus propre à caractériser la nature du rapprochement qui constitue le véritable asymptotisme. Nous croyons devoir développer ces généralités qui pourraient laisser quelques difficultés.

Supposons qu'après la substitution de $\frac{1}{i}$ au lieu de x dans $y = fx$, cette fonction, qui devient $f\left(\frac{1}{i}\right)$, se développe comme il suit :

$$y = f\left(\frac{1}{i}\right) = \text{etc.} + \frac{D'}{i^3} + \frac{C'}{i^2} + \frac{B'}{i} + A + Bi + Ci^2 + \text{etc.}$$

Il y aura lieu à plusieurs distinctions ; 1°. sous cette forme générale, le contact le plus intime avec la proposée pour $i = 0$, ou pour $x = \infty$, sera celui de la courbe

$$y = \text{etc.} + \frac{D'}{i^3} + \frac{C'}{i^2} + \frac{B'}{i} + A,$$

c'est-à-dire, de la courbe

$$y = A + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \text{etc.},$$

en sorte que la courbe $y = fx$ aura une asymptote curviligne; 2°. si

$$y = f\left(\frac{1}{i}\right) = \frac{B'}{i} + A + Bi + Ci^2 + \text{etc.},$$

Celle du contact le plus intime pour $i = 0$ ou pour $i = \infty$, aura pour équation

$$y = \frac{B'}{i} + A = A + B'x;$$

elle sera donc une ligne droite; 3°. si le développement de la proposée ne renferme pas de puissances positives de i, ou si l'on a

$$y = f\left(\frac{1}{i}\right) = \frac{C'}{i^2} + \frac{B'}{i} + A,$$

la courbe du contact le plus intime pour $x = \infty$, sera

$$y = \frac{C'}{i^2} + \frac{B'}{i} + A = A + B'x + C'x^2,$$

et les courbes

$$y = A, \quad y = A + B'x,$$

auront, avec la proposée, un contact moins intime que la précédente : dans ces trois cas, l'ordonnée y est infinie pour $x = \infty$; 4°. enfin soit

$$y = f\left(\frac{1}{i}\right) = A + Bi + Ci^2 + \text{etc.},$$

l'asymptote sera

$$y = A,$$

équation d'une droite parallèle à l'axe des x. Si la quantité A est nulle, l'asymptote est l'axe des x lui-même; alors pour l'abscisse infinie, l'ordonnée est une quantité finie. On voit donc comment il arrive que certaines courbes ne prennent que des asymptotes rectilignes, tandis que d'autres en comportent de rectilignes et de curvilignes en même tems. C'est ce que nous allons éclaircir par quelques exemples qui ne laisseront plus de difficulté sur ce point de théorie.

Nous ferons d'abord une application de ces principes à la détermination de l'asymptote de l'hyperbole ordinaire, représentée sous la caractéristique $B^2 - 4AC > 0$, par l'équation plus générale du second degré

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Cette équation résolue par rapport à y, donne

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}(ax^2 + bx + c)^{\frac{1}{2}},$$

en posant $a = B^2 - 4AC$, $b = 2(BD - 2AE)$,....... $C = D^2 - 4AF$. Soit $x = \frac{1}{i}$, et on aura

$$y = -\frac{B}{2A}\cdot\frac{1}{i} - \frac{D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\cdot\frac{1}{i}\{a + bi + ci^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on développe la quantité sous l'exposant $\frac{1}{2}$, en représentant les deux termes $bi + ci^2$ par une seule lettre, on aura cette série ascendante

$$y = \left(-\frac{B}{2A} \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2A}\right]\frac{1}{i} - \frac{D}{2A} \pm \frac{b}{4a^{\frac{1}{2}}A}$$

$$\pm \frac{1}{2A}\left[\frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{b^2}{8a^{\frac{3}{2}}}\right]i \pm (\quad)i^2 + \text{etc.}$$

Or, l'équation de la ligne droite $y = mx + n$ devient, après la substitution de $\frac{1}{i}$ pour x,

$$y = m\frac{1}{i} + n,$$

et si l'on détermine les quantités arbitraires m et n, d'après les conditions

$$m = -\frac{B \pm a^{\frac{1}{2}}}{2A}, \quad n = -\frac{D}{2A} \pm \frac{b}{4a^{\frac{1}{2}}A},$$

on assujétira la droite à devenir asymptote de la courbe; si l'on remplace a et b par leurs valeurs, on aura

$$m = \frac{1}{2A}(-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}), \quad n = \frac{1}{2A}\left(-D \pm \frac{BD - 2AE}{\sqrt{B^2 - 4AC}}\right);$$

de sorte que l'équation des asymptotes, sera

$$y = \pm\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\left\{x\sqrt{B^2 - 4AC} \pm \frac{BD - 2AE}{\sqrt{B^2 - 4AC}}\right\},$$

la même que celle que j'ai trouvée (*Elémens de Géométrie analytique*).

Soit, en second lieu, l'équation

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0,$$

on trouvera par le procédé exposé (pag. 173 .... 177)

$$y = -x - a - a^2x^{-1} - \text{etc.};$$

la droite qui a pour équation

$$y = -x - a,$$

est donc une asymptote qui se construit en prenant $AC = a$, Fig. 7. $AB = a$; mais si on prend les trois premiers termes, on a

$$xy + x^2 + ax + a^2 = 0,$$

équation d'une asymptote courbe qui est une hyperbole dont le centre est en C. Cette courbe approchera plus de la courbe proposée que n'en approche la droite FC. On aurait des asymptotes plus approchantes, en prenant un plus grand nombre des premiers termes.

Enfin, l'équation

$$y^4 - 2x^2y^2 - x^4 + 2axy^2 - 5ax^3 = 0,$$

étant résolue d'après le procédé que nous venons de rappeler, donne

$$y = \pm px \pm \frac{a(3\sqrt{2}-4)}{8p} + Ax^{-1} + \text{etc.},$$

p désignant $\sqrt{1+\sqrt{2}}$: en construisant. . . . .
$y = \pm px \pm \frac{a(3\sqrt{2}-4)}{8p}$, on aura les asymptotes rectilignes de la courbe : si l'on prend plus de termes, on trouvera les asymptotes curvilignes.

CHAPITRE XVII.

Quadrature et rectification des Courbes planes.

1°. *Quadrature des Courbes.*

QUARRER une courbe, c'est assigner l'aire comprise entre un arc de cette courbe, l'axe des abscisses et les deux ordonnées correspondantes aux deux extrémités de l'arc.

Considérons en général, la courbe représentée par l'équation

$$y = fx,$$

y étant l'ordonnée rectangulaire correspondante à l'abscisse x dont elle est une fonction donnée. L'espace APM terminé par cette courbe, l'axe des abscisses et une ordonnée quelconque y, sera donc aussi déterminé par une fonction de la même abscisse x, puisque cet espace croît et décroît avec cette abscisse.

Désignons l'espace APM par Fx, x étant AP, et supposons que x devienne $x+i$, i étant l'accroissement PP'; la fonction $F(x+i)$ représentera l'espace $AP'M'$, et... $F(x+i) - Fx$ sera l'espace $P'PM'M$. Or, soit que les ordonnées aillent en augmentant, soit qu'elles aillent en diminuant, depuis l'ordonnée PM jusqu'à l'ordonnée $P'M'$, l'espace $F(x+i) - Fx = PP'M'M$ sera, dans le premier cas, plus grand que le rectangle $ifx = PP'mM$, et plus petit que le rectangle $if(x+i) = PP'M'm'$, et, dans le second, plus grand que ce dernier et moindre que le Fig. 8.

premier ; donc, l'espace représenté par $F(x+i)-Fx$ sera toujours nécessairement renfermé entre les limites ifx et $if(x+i)$, lesquelles seront, par conséquent, les limites de $F(x+i)-Fx$.

Développons les fonctions $f(x+i)$ et $F(x+i)$ suivant la formule (chap. XI), et arrêtons-nous au premier terme pour la première, et aux deux premiers termes pour la seconde ; il viendra

$$f(x+i)=fx+if'(x+j),$$

$$F(x+i)=Fx+iF'x+\frac{i^2}{2}F''(x+j),$$

où j est une quantité indéterminée qui peut n'être pas la même pour les deux fonctions, mais qui doit toujours être renfermée entre les limites o et i. Il faudra donc que la fonction Fx soit telle que la quantité . . . .
$iF'x+\frac{i^2}{2}F''(x+j)=F(x+i)-Fx=PP'M'M$ soit renfermée entre les limites $ifx=PP'mM$ et . . . .
$ifx+i^2f'(x+j)=PP'M'm'$, quelle que soit la valeur de i, et conséquemment en prenant i aussi petit qu'on voudra. Or, l'intervalle entre ces deux limites étant . . . .
$i^2f'(x+j)=MmM'm'$, la différence de l'aire $F(x+i)-Fx$, à l'un quelconque des deux rectangles, par exemple, au rectangle ifx, différence qui est $iF'x+\frac{i^2}{2}F''(x+j)-ifx$, c'est-à-dire, $i(F'x-fx)+\frac{i^2}{2}F''(x+j)=PP'M'M-PP'mM=MmM'$ devra être moindre, abstraction faite des signes, que . . .
$i^2f'(x+j)=MmM'm'$. Mais il est aisé de prouver que cette condition ne peut avoir lieu pour une valeur de i, aussi petite qu'on voudra, à moins qu'après la division par i, le terme affecté de i ne disparaisse. En effet, l'inégalité pré-

cédente divisée par i, devient

$$(F'x - fx) + \frac{i}{2} F''(x+j) < if'(x+j);$$

et il est évident qu'on peut prendre i tellement petit qu'on ait, au contraire,

$$F'x - fx + \frac{i}{2} F''(x+j) > if'(x+j);$$

donc on doit avoir

$$F'x = fx, \quad \text{ou} \quad \mathrm{d}(Fx) = fx.\mathrm{d}x,$$

condition suffisante pour la détermination de Fx, puisque cette fonction n'est autre chose que l'intégrale de $fx.\mathrm{d}x$.

Donc, en général, le coefficient différentiel de la fonction qui exprime l'aire d'une courbe par l'abscisse, est la fonction qui représente l'ordonnée de cette courbe. Ainsi l'équation d'une courbe, étant donnée, si on veut l'expression de l'aire, c'est-à-dire, la quadrature de la courbe, il n'y aura qu'à chercher l'intégrale de $y\mathrm{d}x$, y étant l'ordonnée, et on pourra ajouter une constante à l'intégrale, constante qu'on déterminera d'après la condition que l'expression de l'aire devienne nulle, au point où l'on voudra la faire commencer. C'est ce que nous allons éclaircir par quelques applications.

Soit

$$y = ax + b,$$

l'équation d'une droite : on aura

$$\mathrm{d}(Fx) = ax\mathrm{d}x + b\mathrm{d}x,$$

dont l'intégrale est

$$Fx = \tfrac{1}{2}ax^2 + bx + \text{const.}$$

Si l'aire Fx doit être nulle, lorsque $x = 0$; c'est-à-dire, si
Fig. 9. elle doit être comptée de l'ordonnée AR, A étant l'origine, on aura pour $x = 0$,

$$0 = \text{const.},$$

et conséquemment

$$Fx = \tfrac{1}{2}ax^2 + bx = yx - \tfrac{1}{2}ax^2 = APMm - RMm = ARMP.$$

Cette aire est limitée dans un sens et illimitée dans l'autre, puisqu'elle s'étend jusqu'à une ordonnée PM dont l'abscisse x est quelconque. Si l'aire doit être comptée d'une ordonnée pm donnée, en désignant Ap par m, l'intégrale ci-dessus devra devenir nulle pour $x = m$, en sorte qu'on trouvera

$$0 = \tfrac{1}{2}am^2 + bm + \text{const}, \quad \text{d'où const} = -\tfrac{1}{2}am^2 - bm,$$

et conséquemment

$$\text{aire } pPMm = \tfrac{1}{2}a(x^2 - m^2) + b(x - m),$$

aire encore limitée dans un sens et illimitée dans l'autre. Si d'ailleurs cette aire doit avoir pour seconde limite l'ordonnée de l'abscisse m', on aura

$$\text{aire} = \tfrac{1}{2}(m'^2 - m^2) + b(m' - m).$$

C'est ce qu'on peut encore trouver, en faisant successivement $x = m'$ et $x = m$ dans l'intégrale générale

$$Fx = \tfrac{1}{2}ax^2 + bx + \text{const},$$

puis retranchant le second résultat du premier. On voit donc que lorsqu'on veut *intégrer entre deux limites*, il est inutile d'ajouter une constante à l'intégrale générale, parce qu'en soustrayant l'aire définie $ARmp$ de l'aire définie $ARMP$, cette constante disparait.

Pour la parabole de l'équation

$$y^2 = 2px,$$

on trouve

$$\text{aire} = \int \sqrt{2p}\, x^{\frac{1}{2}}\, dx = \tfrac{2}{3} \sqrt{2p}\, x^{\frac{3}{2}} + \text{const} = \tfrac{2}{3}\, xy + \text{const},$$ Fig 10.

si l'aire MAP doit être comptée du sommet, pour $x = 0$, on a aire $= 0$, ainsi la constante est nulle.

Donc l'*aire* MAM' *d'un segment parabolique, est les deux tiers du rectangle circonscrit* Mm m'M'.

En général, pour les paraboles de tous les degrés $y^m = ax^n$, on trouve

$$\text{aire} = \frac{mx}{m+n}\, xy + \mathit{const.}$$

Toutes ces courbes sont donc *quarrables* exactement.

Pour l'hyperbole équilatère entre ses asymptotes AX, AY, on a l'équation

$$xy = m^2;$$

donc

$$\text{aire} = \int y\,dx = m^2 \int \frac{dx}{x} = m^2 \log x + \text{const},$$

l'aire ne peut être comptée depuis l'axe AY, parce que $x = 0$, Fig. 11.
donnerait aire $= 0$ et const $= -m^2 \log 0 = \infty$. Mais si l'aire doit commencer à l'ordonnée BC au sommet C, comme l'abscisse correspondante $AB = m$, on a

$$\text{const} = -m^2 \log m,$$

d'où

$$\text{aire} = m^2 \log \frac{x}{m}.$$

Pour $m=1$, aire $= l.x$. Ainsi *chaque aire prise à partir de BC, est le logarithme népérien de l'abscisse correspondante.*

Mais si l'angle des asymptotes ou des coordonnées, est représenté par ζ, il faut remplacer y par $y \sin \zeta$ dans $\int y dx$, et en supposant $m=1$, on a

$$\int y dx . \sin \zeta = \int \sin \zeta \frac{dx}{x} = \sin \zeta \log x = M \log x,$$

M désignant alors le module du système de logarithmes (pag. 48). Si l'angle ζ est droit, on revient au premier cas, et on obtient les *logarithmes népériens*. Mais on voit qu'en faisant varier l'angle ζ des asymptotes, on peut obtenir tous les systèmes possibles de logarithmes. Ainsi, lorsque la base est 10, on a

$$M = \sin \zeta = 0,4342945....$$

L'angle qui a ce nombre pour sinus, le rayon étant l'unité, est 28°,601.... nouvelle division : tel est donc l'angle que doivent faire entre elles les asymptotes d'une hyperbole, la puissance étant 1, pour que chaque aire soit le logarithme tabulaire de son abscisse. On voit par là que c'est très-improprement qu'on avait donné la dénomination de *logarithmes hyperboliques* à ceux de *Néper.*

Nous avons trouvé (pag. 239) qu'en portant en K l'origine des coordonnées rectangulaires de la cycloïde, et faisant $KS = x$, $SM = y$, l'équation de cette courbe devenait

Fig. 6. $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a - y}}, \quad \text{d'où } dy \sqrt{\frac{2a - y}{y}} = dx;$$

ainsi $\int y dx$ qui représente l'aire, devient

$$\int y dx = \int dy \sqrt{2ay - yy} = \text{aire } KSM,$$

or en menant par le point M la parallèle MN' à AL, on a $FN' = \sqrt{2ay - y^2}$, donc

$$\int dy\, \sqrt{2ay - yy} = \text{aire } KmFN',$$

conséquemment

$$\text{aire } KSM = \text{aire } KmFN',$$

et en prenant ces aires depuis $y = \rho$, jusqu'à $y = 2a$, on trouve

$$\text{aire } KYAMK = \text{aire } KmFI,$$

mais l'aire du rectangle $KYAI$ est quadruple de l'aire $KmFI$: donc

$$\text{aire } AMKI = \tfrac{3}{2} \text{ aire du cercle générateur},$$

et conséquemment l'*aire de la cycloïde entière, est triple de celle du cercle générateur.*

Nous nous bornerons à ces trois exemples dont les deux premiers n'exigent que des intégrations faciles : on en trouvera d'autres dans les traités connus de calcul intégral.

Après le problème de la quadrature des courbes, se présente naturellement celui de leur *rectification*, c'est-à-dire, de la détermination de la longueur même de la courbe.

Nous partirons, pour la solution de ce problème, du principe d'*Archimède*, adopté par tous les géomètres anciens et modernes, suivant lequel deux lignes courbes ou composées de droites, ayant leurs concavités tournées du même côté et les mêmes extrémités, celle qui renferme l'autre est la plus longue. D'où il suit qu'un arc de courbe tout concave du même côté, est plus grand que sa corde, et, en même tems, moindre que la somme des deux tangentes menées aux deux extrémités de l'arc, et comprises entre ces extrémités et leur point d'intersection. De là on peut tirer cette autre

conséquence, que la longueur du même arc, se trouvera comprise entre Mt' et $M't$, qui sont les tangentes en M et M', prolongées jusqu'aux ordonnées $P'M'$ et PM.

Fig. 12. En effet, ayant prolongé les tangentes MT et $M'T$ jusqu'aux ordonnées $P'M'$, PM, en t' et t, la tangente Mt' sera plus grande que la corde MM', comme oblique plus éloignée de la perpendiculaire Mm' à $P'M'$; et, au contraire, la tangente $M't$ sera plus petite que la corde $M'M$, comme oblique plus voisine de la perpendiculaire $M'm$ à PM. De plus, si on considère les deux triangles MTM', $t'Tt$, il est visible que les deux côtés MT, Tt' qui sont les deux portions de la tangente Mt', seront plus grands que les deux côtés $M'T$, Tt qui sont les deux portions de la seconde tangente, parce que, dans les triangles $Tt'M'$, TtM, les angles $TM't'$, MtT sont plus grands que les angles $Tt'M'$, tMT: donc la tangente entière MTt' sera plus grande que $M'T + TM$, et conséquemment plus grande que l'arc $M'M$.

Cela posé fx étant l'ordonnée PM qui répond à l'abscisse $x = AP$, $\frac{dfx}{dx} = f'x$ sera la tangente de l'angle sous lequel la tangente de la courbe en M, rencontre l'axe des abscisses : donc $\sqrt{i^2 + (if'x)^2} = i\sqrt{1 + (f'x)^2}$ sera la valeur de la portion de tangente Mt', comprise entre les ordonnées fx et $f(x+i) = P'M'$. De la même manière, on aura $f'(x+i)$ pour la tangente de l'angle sous lequel la tangente $M't$ à l'extrémité de l'ordonnée $f(x+i)$, rencontre l'axe, et on trouvera $i\sqrt{1 + f'(x+i)^2}$ pour expression de la partie $M't$ de cette tangente.

Soit, pour plus de simplicité,

$$\varphi x = \sqrt{1 + (f'x)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

alors $i\varphi x$, $i\varphi(x+i)$ représenteront les portions Mt' et $M't$: ainsi la longueur de l'arc MM' sera renfermée entre les deux quantités $i\varphi x$ et $i\varphi(x+i)$, en donnant à i une valeur aussi petite qu'on voudra. Donc si Φx est la fonction de x qui exprime l'arc de courbe AM, il faudra que la quantité $\Phi(x+i) - \Phi x = MM'$, soit comprise entre $i\varphi x$ et $i\varphi(x+i)$, quelque petit que soit i : d'où par un raisonnement semblable à celui que nous avons fait pour les aires, on conclura

$$\Phi' x = \varphi x, \quad \text{et } d\Phi x = \varphi x . dx = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Donc, pour avoir la longueur indéfinie de la courbe, il faudra remplacer $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur en x déduite de l'équation de la courbe différentiée, chercher l'intégrale de $dx\sqrt{1+(f'x)^2}$, et ajouter une constante qu'on déterminera de manière que l'expression de l'arc s'évanouisse au point d'où on voudra compter cet arc. Ainsi

$$\text{arc } AM = \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \textit{const.}$$

Si l'on désigne l'arc AM par s, on a donc la formule

$$s' = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Maintenant, α étant l'angle entre la tangente et l'axe des abscisses, on trouve facilement que

$$\text{tang } \alpha = y' = \frac{dy}{dx}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{s'} = \frac{dx}{ds}, \quad \sin\alpha = \frac{y'}{s'} = \frac{dy}{ds},$$

$$\text{tang} = \frac{ys'}{y'} = \frac{yds}{dy}, \quad \text{norm} = ys' = \frac{yds}{dx},$$

tangente et normale étant les portions de la tangente et de la normale, depuis le point de contact, jusqu'à la rencontre avec l'axe.

Dans le chapitre des coordonnées polaires, nous traduirons dans ces coordonnées, les formules des quadratures et des rectifications.

Dans la cycloïde, l'origine étant toujours en K, on a

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{y}{2a-y}},$$

et conséquemment

$$ds=\int\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{y}}dy=2\sqrt{2ay}.$$

Fig. 6. On n'ajoute pas de constante, parce que l'arc commence en K: or $\sqrt{2ay}=KF$: donc l'arc KM est double de la corde KF qui lui correspond dans le cercle KFI.

Fig. 13. On sait que l'angle entre les deux rayons vecteurs RM, RM', a pour supplément l'angle t entre les tangentes Mt, $M't$; or, l'angle MtM' ayant aussi pour supplément MtT', ce dernier angle est égal à l'angle en R. Nous allons chercher l'expression de sa tangente dont on a besoin dans la mécanique.

Désignons par a et a' les tangentes trigonométriques des angles faits avec l'axe des abscisses, par les tangentes en M et M'. La tangente de l'angle MtT' est

$$\text{tang } MtT'=\frac{a-a'}{1+aa'};$$

Or, $a=y'=f'x$, $a'=f'(x+i)$; donc

$$\frac{a-a'}{1+aa'}=\frac{f'x-[f'x+if''x+\frac{i^2}{2}f'''x+\text{etc.}]}{1+f'x[f'x+if''x+\text{etc.}]}$$
$$=\frac{-if''x-\frac{i^2}{2}f'''x+\text{etc.}}{1+(f'x)^2+if'x.f''x+\text{etc.}}.$$

Si l'on désigne la tangente de MtT' par t, et qu'on suppose l'accroissement i plus petit que toute grandeur donnée, ce qui revient à prendre sur la courbe deux points M et M' consécutifs, on aura

$$t=\frac{-iy''}{1+y'^2}=\frac{-y''\mathrm{d}x}{1+y'^2}=\frac{y''\mathrm{d}x}{1+y'^2}$$

en observant que, pour les courbes concaves vers l'axe des abscisses, $y''<0$ (chap. suiv.); mais de l'expression du rayon de courbure

$$r=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

on déduit

$$\frac{y''}{1+y'^2}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{r}=\frac{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}}{r};$$

donc

$$t=\frac{\mathrm{d}s}{r},\quad\text{et}\quad \text{tang}\,MtM'=-\frac{\mathrm{d}s}{r}.$$

On pourrait chercher deux limites entre lesquelles la tangente demandée dût toujours être comprise, quelque petit que fût l'accroissement, ainsi que nous l'avons fait dans ce chepitre; mais ce serait alonger inutilement la solution.

CHAPITRE XVIII.

Des plus grandes et des moindres valeurs des fonctions d'une seule variable.

IL existe un genre de questions, qui, quoique indépendantes de la considération des tangentes, peuvent néanmoins s'y rapporter : ce sont les questions qu'on appelle de *maximis* et *minimis*, et qui consistent à trouver, pour une fonction donnée d'une variable, la valeur de cette variable qui rend la valeur de la fonction la plus grande ou la plus petite. Comme les courbes ne sont que la représentation ou le tableau de toutes les valeurs de la fonction de l'abscisse, représentée par l'ordonnée, il est visible que la question de trouver la plus grande ou la plus petite valeur d'une fonction d'une seule variable, revient à déterminer la plus grande ou la plus petite ordonnée de la courbe dont cette variable serait l'abscisse, et la fonction donnée, serait l'ordonnée.

Or, l'inspection seule de la courbe suffit pour faire voir que ces ordonnées ne peuvent être que celles qui répondent aux points dont les tangentes seraient parallèles à l'axe des abscisses. Si la courbe présente sa convexité vers l'axe, l'ordonnée sera alors évidemment un *minimum* ; et si la courbe est concave vers l'axe, l'ordonnée est un *maximum*. Ainsi, les
Fig. 14. ordonnées PM, $P''M''$ seront chacune un *maximum* dans les ondulations mMn, $m'M''n'$, et $P'M'$ sera un *minimum* dans l'ondulation $nM'm'$.

Nous avons vu (pag. 215) que la tangente trigonométrique

de l'angle que la tangente d'une courbe fait avec l'axe des abscisses, est exprimée, en général, par $\frac{dy}{dx}$, y étant l'ordonnée qu'on suppose fonction de l'abscisse x; donc, pour que cette tangente devienne parallèle à l'axe des x, il faut que l'on ait $\frac{dy}{dx}=0$; or, si l'on fait $\frac{dy}{dx}$ ou $y'=0$ dans les expressions des coordonnées a et b (pag. 229) qui déterminent le lieu du centre osculateur, on a

$$a=x,\ b=y+\frac{1}{y''};$$

d'où l'on voit que si y'' ou $\frac{d^2y}{dx^2}$ est une quantité positive, on aura $b>y$, qu'ainsi ce centre tombera au-delà de la courbe par rapport à l'axe; la courbe tournera donc sa convexité vers l'axe. Si y'' est une quantité négative, le même centre tombera entre la courbe et l'axe, à cause de $y>b$; de sorte que la courbe sera alors concave vers l'axe. Donc la fonction y sera un *maximum* ou un *minimum*, lorsque $\frac{dy}{dx}$ sera $=0$; et, en particulier, elle sera un *maximum* lorsque $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera, en même tems, une quantité négative, et un *minimum* lorsque $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera une quantité positive. C'est en quoi consiste la méthode connue de *maximis* et *minimis*.

Mais il convient de faire voir comment cette méthode peut se déduire directement de la série de *Taylor*, sans la considération intermédiaire des courbes.

Soit, à cet effet,

$$y=fx$$

la fonction dont on demande le *maximum* ou le *minimum*. Si a est la valeur de x qui répond au *maximum* ou au *minimum*, il faudra que la valeur de fa soit toujours plus petite ou plus grande que celle de $f(a+i)$, quelle que soit la quantité i, positive ou négative, et même quelque petit que soit cet accroissement; car une quantité ne parvient au *maximum* ou au *minimum*, que lorsqu'elle a reçu toutes les augmentations ou toutes les diminutions dont elle est capable : en sorte qu'avant et après ce terme, elle se trouve moindre dans le cas du *maximum*, et plus grande dans celui du *minimum*.

Développons en série $f(x+i)$, et nous aurons

$$f(x \pm i) = fx \pm \frac{dy}{dx} i + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{i^2}{1.2} \pm \frac{d^3y}{dx^3} \frac{i^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4} \frac{i^4}{1.2.3.4} \pm \text{etc.},$$

or, d'après ce qui a été dit plus haut, on doit avoir, pour le cas du *maximum*,

$$\pm \frac{dy}{dx} i + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{i^2}{1.2} \pm \text{etc.} < 0,$$

et, pour le cas du *minimum*,

$$\pm \frac{dy}{dx} i + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{i^2}{1.2} \pm \text{etc.} > 0,$$

or, comme on peut prendre l'accroissement i tellement petit que le premier terme $\frac{dy}{dx} i$ surpasse la somme des termes suivans (pag. 161), ce qui aura lieu, *à fortiori*, pour des valeurs plus petites de i; il ne pourra y avoir *maximum* ou *minimum* tant que le terme $\pm \frac{dy}{dx} i$ subsistera, puisqu'alors les deux

valeurs $f(x \pm i)$ étant l'une plus grande et l'autre plus petite que fx, celle-ci ne pourrait être ni *maximum*, ni *minimum*. Il faut donc qu'on ait dans les deux cas

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

condition qui réduit les précédentes à

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} \pm \frac{d^3y}{dx^3} \frac{i^3}{1.2.3} + \text{etc.} < 0,$$

pour le *maximum*, et à

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} \pm \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \text{etc.} > 0,$$

pour le *minimum*.

Si donc la valeur de x, que nous désignons par a, tirée de $\frac{dy}{dx} = 0$, et substituée dans le coefficient différentiel $\frac{d^2y}{dx^2}$, donne un résultat positif; alors les deux fonctions $f(a \pm i)$ pourront être rendues plus grandes que fa par une très-petite valeur de i, et fa sera un *minimum*; si au contraire $x = a$ rend le coefficient $\frac{d^2y}{dx^2}$ négatif, les deux fonctions $f(a \pm i)$ pourront être rendues plus petites que fa, et cette fonction sera un *maximum*. Nous sommes donc ramenés aux conclusions trouvées plus haut, en partant de la considération des courbes.

Mais il peut arriver que $x = a$ anéantisse le coefficient $\frac{d^2y}{dx^2}$, sans qu'il rende nul en même tems $\frac{d^3y}{dx^3}$: alors on aura

$$f(x \pm i) = fx \pm \frac{d^3y}{dx^3}\frac{i^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{i^4}{1.2.3.4} \pm \text{etc.},$$

et parce qu'on peut prendre pour i une valeur telle que le terme $\pm \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{i^3}{1.2.3}$ surpasse la somme de tous les autres, il s'ensuivra que l'ordonnée fx sera moindre que la fonction $f(x+i)$, et plus grande que $f(x-i)$, si la fonction $\frac{d^3y}{dx^3}$ est positive, et, *vice versâ*, si elle est négative; conséquemment cette fonction ne pourra être ni *maximum* ni *minimum*, à moins que, pour $x = a$, on ait $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, et alors suivant que, pour cette valeur de x, la fonction $\frac{d^4y}{dx^4}$ sera négative ou positive, il y aura aussi *maximum* ou *minimum*, et ainsi de suite.

Donc, en résumé, si y est une fonction quelconque de x, on aura d'abord pour le *maximum* comme pour le *minimum* la condition $\frac{dy}{dx} = 0$ de laquelle on déduira x; et ensuite par la substitution de cette valeur de x, dans $\frac{d^2y}{dx^2}$, ce.... coefficient sera négatif pour le *maximum*, et positif pour le *minimum*: si ce coefficient est nul, il faudra que $\frac{d^3y}{dx^3}$ le soit aussi, et que l'on ait $\frac{d^4x}{dx^4} < 0$, pour le *maximum*, et > 0 pour le *minimum*, et ainsi de suite. Si le premier des coefficiens différentiels qui restent, est d'un ordre impair, la fonction ne pourra acquérir une plus grande ou une moindre valeur.

Si la fonction était donnée par l'équation

$$f(x,y), = o = u,$$

on en déduirait (chap. VI)

$$\frac{du}{dx} + y' \frac{du}{dy} = o \ldots\ldots\ldots (1) \quad \text{d'où} \quad y' = -\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}$$

où y' désigne $\frac{dy}{dx}$: la condition $y' = o$, emporte celle-ci : $\frac{du}{dx} = o$; et au moyen de ces deux équations

$$u = o, \quad \frac{du}{dx} = o,$$

on obtient les valeurs de x et y par lesquelles $f(x,y)$ devient ou peut devenir *maximum* ou *minimum*. Cela fait, on a recours à l'équation dérivée du second ordre

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}y' + \frac{d^2u}{dy^2}y'^2 + \frac{du}{dy}y'' = o \ldots (2),$$

qui, à raison de $y' = o$, se réduit à

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dy}y'' = o,$$

et après la substitution dans $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{du}{dy}$ des valeurs précédemment obtenues pour x et y, on reconnaît au signe de y'', s'il y a *maximum* ou *minimum*. Si $y'' = o$, l'équation dérivée du troisième ordre se réduisant à

$$\frac{d^3u}{dx^3} + \frac{du}{dy}y''' = o,$$

il ne pourra y avoir *maximum* ou *minimum* à moins que y''' ne soit aussi $=0$: d'où l'on conclut $\frac{d^3u}{dx^3}=0$. L'équation dérivée du quatrième ordre, fera connaître la valeur et le signe du $\frac{d^4y}{dx^4}=y^{\text{IV}}$, et ainsi de suite.

Prenons, pour premier exemple, la fonction

$$y=x^x:$$

la différentiation donne

$$\frac{dy}{dx}=x^x(1+lx)\ (*),$$

on posera donc

$$x^x(1+lx)=0,\quad \text{d'où}\quad lx=l\left(\frac{1}{e}\right),$$

parce que le premier facteur x^x n'est pas nul : conséquemment, en passant des logarithmes aux nombres,

$$x=\frac{1}{e},$$

e étant la base des *logarithmes népériens*. Pour reconnaître si cette valeur correspond à un *maximum* ou *minimum*, ou

(*) De la relation $y=x^x$, on déduit, en prenant de part et d'autre les *logarithmes népériens*, ou les logarithmes rapportés à la base *e*, $ly=xlx$, dont la différentielle est

$$\frac{dy}{y}=dx\times lx+x\frac{dx}{x}=dx(lx+1),$$

et conséquemment,

$$\frac{dy}{dx}=y(lx+1)=x^x(1+lx).$$

formera le coefficient différentiel du second ordre, qui est

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^x \left\{ \frac{1}{x} + (1 + lx)^2 \right\},$$

lequel, par la substitution de $\frac{1}{e}$ pour x, deviendra positif : d'où on conclura que cette valeur de x rend la fonction proposée un *minimum*.

Si on demande le nombre x dont la racine de l'ordre x, soit un *maximum* ; on a, pour le déterminer,

$$y = \sqrt[x]{x},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{1 - lx}{x^2} = 0,$$

et conséquemment

$$lx = 1 :$$

pour cette valeur, on trouve, en observant que x est la base e *des logarithmes népériens*, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, donc e est, en effet, le nombre cherché.

Passons à d'autres questions auxquelles il ne faudra pas se borner.

Probl. *Trouver sur la ligne qui joint deux lumières, le point le moins éclairé.*

Si l'on désigne par b l'intervalle entre les deux lumières, par x la distance de l'une d'elles au point en question, et conséquemment par $b - x$ celle de l'autre au même point, nous avons vu (*Alg.* 1re. *sect.*) que c étant l'intensité de la première lumière à la distance a, et d l'intensité de la seconde à la même distance, $\frac{ca^2}{x^2}$ et $\frac{da^2}{(b-x)^2}$ représentaient les intensités des lumières au point qui est à la distance x de

la première lumière et à la distance $b-x$ de la seconde. Or, la somme de ces intensités que nous représenterons par y, doit être un *minimum* : on aura donc

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2ca^2}{x^3}+\frac{2da^2}{(b-x)^3}=0,$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{b\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{d}}.$$

Si les intensités sont égales, $c=d$, et on a

$$x=\frac{b}{2}:$$

donc le point le moins éclairé est le milieu de la distance entre les deux points lumineux (*Alg.*).

Probl. *Etant donnée une ellipse, assigner les diamètres conjugués qui font entre eux, le plus grand angle possible.*

Soient a et b les moitiés du grand et du petit axe d'une ellipse; m et n deux demi-diamètres conjugués, et φ l'angle entre ces demi-diamètres. On sait (*Élém. de Géom. analy.*) que

$$ab=mn\sin\varphi,\quad a^2+b^2=m^2+n^2:$$

la première de ces équations donne

$$\sin\varphi=\frac{ab}{mn},$$

et on tire de la seconde

$$n=\sqrt{a^2+b^2-m^2};$$

donc, si l'on désigne sin φ par y, on aura

$$y=\frac{ab}{m\sqrt{a^2+b^2-m^2}}.$$

Différentions, en observant que la quantité m est seule variable, et nous aurons

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}m} = -ab\left\{\frac{\sqrt{a^2+b^2-m^2} - \frac{m^2}{\sqrt{a^2+b^2-m^2}}}{m^2(a^2+b^2-m^2)}\right\};$$

or $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}m} = 0$, donne

$$a^2 + b^2 = 2m^2:$$

d'ailleurs

$$a^2 + b^2 = m^2 + n^2,$$

donc on aura $m = n$. Ainsi ces diamètres conjugués sont égaux.

Pour juger si l'angle entre ces diamètres est un *maximum* ou un *minimum*, il faut passer au $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$: à cet effet, de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}m} = -ab\left\{\frac{a^2+b^2-2m^2}{m^2(a^2+b^2-m^2)^{\frac{3}{2}}}\right\},$$

on déduira

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}m^2} = -ab\left\{\frac{m^2(a^2+b^2-m^2)^{\frac{3}{2}} \times -4m - (a^2+b^2-2m^2)\mathrm{d}[m^2(a^2+b^2-m^2)^{\frac{3}{2}}]}{m^4(a^2+b^2-m^2)^3}\right\},$$

coefficient qui, sous l'hypothèse $a^2+b^2 = 2m^2$, de laquelle on tire $a^2+b^2-m^2 = m^2$, se réduit à

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}m^2} = \frac{4abm^5 \times \pm m}{m^{10}} = \pm\frac{4ab}{m^4},$$

en observant que

$$(a^2+b^2-m^2)^{\frac{3}{2}} = \pm\sqrt{(a^2+b^2-m^2)^3} = \pm\sqrt{m^6} = \pm m^3.$$

Il y a donc lieu, en même tems, à un *maximum* et à un *minimum*; le premier répond à

$$m = -\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

valeur qui donne

$$\sin\varphi = -\frac{2ab}{a^2+b^2}, \quad \text{d'où} \quad \cos\varphi = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},$$

et de là

$$\tang\varphi = -\frac{2ab}{a^2-b^2} \ldots\ldots (1);$$

le second répond à

$$m = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

d'où l'on déduit

$$\tang\varphi = \frac{2ab}{a^2-b^2} \ldots\ldots (2).$$

On sait que les diamètres conjugués égaux, sont respectivement parallèles aux cordes menées des extrémités du grand axe à l'extrémité du petit; en sorte que l'angle entre ces diamètres, devient égal à l'angle entre ces cordes, lequel est *maximum* parmi tous les angles inscrits à l'ellipse, qui s'appuient sur le grand axe; et, en effet, la valeur de tang φ, donnée par (1), est celle qu'on trouve pour cet angle; la valeur (2) est relative à l'angle supplémentaire qui est celui de deux cordes menées des deux extrémités du petit axe à l'extrémité du grand, et qu'on sait être un *minimum* entre tous les angles inscrits qui s'appuient sur le petit axe.

On peut se proposer *d'assigner le triangle de l'aire* maximum, *formé par les deux rayons vecteurs d'une ellipse, et la portion du grand axe, comprise entre les foyers.* Comme dans l'ellipse, *la somme des rayons vecteurs est constante*, la solution de cette question exige donc celle du problême suivant.

Probl. *Assigner entre tous les triangles de même base et de même périmètre, celui dans lequel les côtés non déterminés, sont égaux*, en supposant qu'il ait été démontré que la surface de ce triangle, est un *maximum*.

C'est donc ce que nous allons prouver. Si l'on désigne par k, z, t, les trois côtés d'un triangle, et qu'on pose....... $p = \frac{k+z+t}{2}$, on sait que S désignant sa surface,

$$S = \sqrt{p(p-k)(p-z)(p-t)} \ldots\ldots (1);$$

mais z et t étant les deux rayons vecteurs en un point quelconque de l'ellipse, et k la distance entre les foyers, on a cette équation de condition

$$z + t = 2a,$$

a étant le demi grand axe de l'ellipse. Elevant l'équation (1) au carré, après avoir remplacé t par $2a - z$, on aura celle-ci

$$S^2 - p(p-k)(p-z)(p+z-2a) = 0 = u \ldots\ldots (2),$$

où S et z sont variables, p, k et a sont des quantités constantes. On en déduit (pag. 271),

$$\frac{du}{dz} = +p(p-k)(p+z-2a) - p(p-k)(p-z)$$

$$\frac{du}{dS} = 2\sqrt{p(p-k)(p-z)(p+z-2a)};$$

on a donc

$$\frac{dS}{dz} = -\frac{p(p-k)(p+z-2a) - p(p-k)(p-z)}{2\sqrt{p(p-k)(p-z)(p+z-2a)}} = 0;$$

condition qui revient à celle-ci

$$p(p-k)(2z-2a) = 0, \quad \text{d'où} \quad z = a,$$

et conséquemment aussi $t = a$. Ainsi les deux rayons vec-

teurs aboutissent à l'extrémité du demi second axe. On a ensuite

$$\frac{d^2u}{dz^2}=2p(p-k),$$

et conséquemment (pag. 271)

$$\frac{d^2S}{dz^2}=-\frac{\frac{d^2u}{dz^2}}{\frac{du}{dS}}=-\frac{2p(p-k)}{2\sqrt{p(p-k)(p-z)(p+z-2u)}}$$

$$=-\frac{p(p-k)}{\sqrt{p(p-k)(p-a)(p-a)}}=-\frac{\sqrt{p(p-k)}}{\sqrt{(p-a)^2}};$$

or, $p=\frac{k}{2}+a$ et $a=\frac{k}{2}+d$, d étant la distance du foyer à l'extrémité la plus voisine du grand axe; donc...... $p=k+d$, d'où $p-k=d$, et conséquemment

$$\frac{d^2S}{dz^2}=-\frac{\sqrt{pd}}{\sqrt{\frac{k^2}{4}}}.$$

Donc l'aire du triangle ainsi déterminé, est un *maximum*.

Fig. 15. Probl. *Étant données une ligne* AB *de longueur et une autre* CNO *de position, trouver le point* N *sous lequel on voit la ligne* AB *sous le plus grand angle possible.*

On a

$$\text{tang } BNA=\text{tang }(BNK-ANK)$$
$$=\frac{\text{tang } BNK-\text{tang } ANK}{1+\text{tang } BNK\times\text{tang } ANK}.$$

Si l'on désigne CN par x, CA par a, CB par b, d'où $BA=b-a$, le sinus de l'angle NCB par m et son cosinus par n, et que l'on abaisse la perpendiculaire NK sur CB; on aura

$$NK = mx, \quad CK = nx,$$

$$\text{tang}\, BNK = \frac{BK}{NK} = \frac{b - nx}{mx}, \ \text{tang}\, ANK = \frac{AK}{NK} = \frac{a - nx}{mx},$$

et conséquemment

$$\text{tang}\, BNA = \frac{(b-a)\, mx^2}{x^2 + ab - (a+b)\, nx} = y.$$

On trouvera

$$\frac{dy}{dx} = m\,(b-a) \left\{ \frac{ab - x^2}{(x^2 - (a+b)\, nx + ab)^2} \right\},$$

d'où on déduira

$$x^2 = ab.$$

Si l'on fait passer par les points A et B donnés une circonférence tangente à la ligne CO, et que N soit le point de tangence, on aura

$$CB : CN :: CN : CA, \quad \text{d'où} \quad x^2 = ab.$$

Le coefficient différentiel $\frac{d^2y}{dx^2}$ après la substitution de ab pour x^2, devient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2m\,(b-a)\sqrt{ab}}{\{2ab - (a+b)\, n\sqrt{ab}\}^2},$$

quantité essentiellement négative, en observant que b est $> a$.

Considérons enfin le cas où la valeur de x tirée de l'égalité à zéro du coefficient différentiel du premier ordre, rendrait infini l'un des coefficiens différentiels qui doivent rester pour qu'il y ait *maximum* ou *minimum*; et alors le développement de $f(x+i)$ serait fautif pour cette valeur de x.

Soit, par exemple,

$$y = b + (x-a)^{\frac{5}{3}},$$

la fonction qu'il s'agit de rendre *maximum* ou *minimum*. On aura

$$y' = \tfrac{5}{3}(x-a)^{\frac{2}{3}} = 0, \quad \text{d'où} \quad x = a,$$

valeur qui donne

$$y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{(x-a)}} = \infty.$$

Pour juger ce qui arrive, pour cette valeur de x, on fera directement les deux développemens

$$f(a+i) = b + i^{\frac{3}{5}}, \quad f(a-i) = b - i^{\frac{3}{5}},$$

et on reconnaîtra que la fonction ne comporte ni *maximum* ni *minimum*.

Au contraire, pour la fonction

$$y = b + (x-a)^{\frac{4}{3}},$$

on a toujours $x = a$ pour $y' = 0$, valeur qui rend $y'' = \infty$: mais alors

$$f(a+i) = b + i^{\frac{4}{3}}, \quad f(a-i) = b + i^{\frac{4}{3}}.$$

D'où l'on conclut que $x = a$ et $y = b$ rendent la fonction proposée un *minimum*. On aurait un *maximum* pour la fonction

$$y = b - (x-a)^{\frac{4}{3}}.$$

On peut se proposer ces fonctions plus générales

$$y = b \pm (x-a)^n,$$

n étant successivement supposé un nombre pair et impair.

CHAPITRE XIX.

Des Points singuliers.

1°. Des Points multiples.

LORSQUE plusieurs branches d'une même courbe viennent se rencontrer en un point, ce point est *multiple*; il est *double*, s'il répond à deux branche; *triple*, s'il répond à trois, etc.

Considérons, pour plus de simplicité, un point double, et soit m ce point : il est formé par intersection des branches $Ampn$, $nqmC$, ou par celle des branches $Ampn$, $nqmC'$. Fig. 16.

Représentons l'équation de la courbe délivrée de radicaux par $u = 0$, u étant une fonction rationnelle de x et y, et par

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} y' = 0 \ldots . (1),$$

la dérivée du premier ordre de $u = 0$, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ étant aussi des fonctions rationnelles de x et y.

Il se présente deux cas à examiner : 1°. celui où les deux branches de la courbe se coupent au point m; 2°. celui où elles se touchent en ce point.

1er. *Cas.* Il est visible que l'équation (1) donnera une valeur unique de $\frac{dy}{dx}$ pour chaque point de la courbe, autre

que le point m : car au point m où les deux branches viennent se couper, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ doit être double, puisqu'en ce point, chacune des tangentes doit avoir sa valeur distincte de celle de l'autre ; or, comme il est impossible de tirer de (1), cette double valeur de y', parce que y' est à la première puissance, et que $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$ sont des fonctions rationnelles de y et x, on doit donc avoir $y' = \frac{0}{0}$, après la substitution faite des coordonnées du point m pour x et y dans $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$. Ainsi on aura

$$\frac{du}{dx} = 0, \qquad \frac{du}{dy} = 0,$$

par le fait de ces substitutions.

2e. *Cas.* Supposons que les deux branches se touchent, et qu'elles aient au point m un contact de l'ordre n : alors les n premiers coefficiens différentiels auront les mêmes valeurs pour les deux branches (chap. XVI) ; mais celui de l'ordre $n+1$ devra prendre deux valeurs différentes. Or, si on différentie n fois de suite l'équation (1) ; on arrivera à une équation dérivée de cette forme (chap. VI)

$$M\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + L = 0 \; . \; . \; . \; . \; (2),$$

où L est fonction de x, y et des coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx} \; . \; . \; . \; . \; \frac{d^n y}{dx^n}$, et M représente $\frac{du}{dy}$, en observant que le coefficient différentiel de l'ordre le plus élevé, a toujours même coefficient dans les dérivées successives de l'équation $u = 0$ (chap. VI). Il faudra donc que $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = y^{(n+1)}$

prenne deux valeurs, ce qui est impossible, puisque l'équation (2) est du premier degré en $y^{(n+1)}$, et que M et L sont des fonctions rationnelles en x et y.

On devra donc avoir $M=0$, par la substitution des coordonnées x et y du point m: donc en vertu de l'équation (1) dans laquelle $\frac{du}{dy}$ est M, on aura encore $\frac{du}{dx}=0$.

Il est donc démontré qu'au point multiple, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ se présente toujours sous la forme $\frac{0}{0}$, soit que les branches de la courbe se coupent, soit qu'elles se touchent. Mais ce qui distingue le premier cas du second, c'est que y' prend plusieurs valeurs au point où plusieurs branches se coupent, tandis qu'il n'en prend qu'une seule au point où plusieurs branches se touchent.

Mais il importe d'observer que l'inverse de cette proposition n'a pas toujours lieu, c'est-à-dire, que les coordonnées d'un point de la courbe, étant substituées dans $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dx}$ peuvent rendre ces fonctions nulles, sans que pour cela le point soit multiple.

Pour le faire voir, prenons l'équation

$$y^m-(x-1)^m x=0,$$

dans laquelle m est un nombre entier pair ou impair. En différentiant cette équation, on en tire cette valeur du $\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{m(x-1)^{m-1}x+(x-1)^m}{my^{m-1}},$$

valeur qui devient $\frac{0}{0}$ au point de la courbe $x=1$, qui donne $y=0$. Or ce point est double ou simple, selon que m est $=2$ ou $=3$; car, dans le second cas, la courbe n'a qu'une seule

branche, et par conséquent aucun point multiple, et, dans le premier, elle a deux branches qui viennent se couper au point en question.

On a donc cette règle pour découvrir les points multiples. L'équation de la courbe, délivrée de radicaux, étant $u = 0$, et sa dérivée du premier ordre étant

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} y' = 0 \,..(1),$$

on posera les deux équations $\frac{du}{dx} = 0$, $\frac{du}{dy} = 0$, d'où l'on tirera un nombre déterminé de valeurs réelles de x et y; on les substituera dans $u = 0$; et, en ne retenant que celles de ces valeurs qui satisfont à cette équation, on sera sûr d'avoir les coordonnées de tous les points de la courbe qui peuvent être des points multiples. On reconnaîtra ensuite si ce point est effectivement multiple, en examinant le cours de la courbe de part et d'autre de ce point.

Lorsque pour des valeurs déterminées de x et y, l'équation (1) devient identiquement nulle, ainsi qu'il arrive au point multiple, il est impossible d'en tirer la valeur de $\frac{dy}{dx}$, et il faut alors avoir recours, pour déterminer cette valeur, à la dérivée du second ordre de $u = 0$, laquelle à cause de $\frac{du}{dy} = 0$, est du second degré en y' ou en $\frac{dy}{dx}$, et est propre à donner la double valeur de y'. Si y' comporte plus de deux valeurs, ou si le point est triple, la dérivée seconde devient insuffisante, et il faut recourir à la dérivée troisième qui, après les réductions, donnera $\frac{dy}{dx}$ par une équation

du troisième degré, et ainsi de suite, pour les points d'un plus haut degré de multiplicité.

Proposons-nous de rechercher si la courbe représentée par

$$ay^2 + x^3 - bxx = 0 = u,$$

comporte un point multiple, et de reconnaître le degré de multiplicité de ce point. Conformément à la règle énoncée, nous calculerons $\frac{du}{dy} = 2ay$, $\frac{du}{dx} = 3x^2 - 2bx$, et nous aurons ces deux conditions

$$2ay = 0, \quad 3x^2 - 2bx = 0,$$

desquelles on tire $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{2}{3}b$. Mais des deux valeurs de x, la première seule prise avec $y = 0$, satisfait à la proposée, en sorte qu'il existe un point multiple dont les coordonnées sont $y = 0$, $x = 0$. Pour reconnaître le degré de multiplicité de ce point, nous passerons à l'équation dérivée du second ordre, de laquelle on tire

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -\frac{6x - 2b}{2a};$$

et, pour $x = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{b}{a}};$$

donc le point en question est double, puisqu'il ne comporte que deux tangentes, et il est une intersection de deux branches.

Si b est négatif dans la proposée, alors

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}.$$

Pour expliquer ce fait, on observera qu'à des abscisses

négatives comprises entre $x = 0$ et $x = b$, répondent toujours, dans la courbe en question, des ordonnées imaginaires ; que pour des abscisses négatives $x = b$ et $x > b$, les ordonnées sont réelles, qu'à des abscisses positives quelconques, répondent des ordonnées constamment imaginaires. D'où l'on conclut que l'origine est un point *isolé* ou *détaché*, mais qui fait cependant système avec les autres points de la courbe, puisqu'il est lié avec eux par une même équation : donc les tangentes calculées pour ce point, doivent être imaginaires. Ce point est encore dit *conjugué* : nous allons donner la théorie qui concerne ces sortes de points.

2°. *Des points conjugués.*

Les *points conjugués* d'une courbe, sont donc des points entièrement séparés des branches de cette courbe, et qu'on regarde comme faisant partie de la courbe, parce que leurs coordonnées satisfont à son équation.

D'après cela, si m est un point conjugué, et que l'abscisse de ce point, soit $x = a$, il faudra que la valeur de l'ordonnée qui répond à $x = a$, soit réelle, et que celles qui répondent à $x = a \pm i$, soient imaginaires, i étant une quantité quelconque indéterminée aussi petite qu'on voudra.

Or, ces valeurs de l'ordonnée, seront données par la série convergente

$$y \pm \frac{dy}{dx} i + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{i^2}{1.2} \pm \frac{d^3y}{dx^3} \frac{i^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

dans laquelle on doit faire $x = a$; il faudra donc que, dans la suite infinie des coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., il s'en trouve qui, pour $x = a$, n'aient que des valeurs

imaginaires ; et, réciproquement, si cette circonstance a lieu, le point dont l'abscisse $= a$, sera un point conjugué.

En partant de cette propriété des points conjugués, on peut aisément prouver, qu'en ces points, comme aux points multiples, la valeur du $\frac{dy}{dx}$, déduite de l'équation de la courbe, délivrée de radicaux, doit se présenter sous la forme $\frac{o}{o}$: car en supposant que $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$, soit le premier coefficient différentiel qui devienne imaginaire, pour $x = a$, la valeur de ce coefficient, ne pourrait être donnée par

$$M\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + L = o \ldots . (2) ;$$

puisque M et L ne contiennent pas de radicaux, même après l'élimination de $y', y'', y''' \ldots y^{(n-1)}$: il faut donc qu'on ait $M = \frac{du}{dy} = o$, et, d'après l'équation (1), $\frac{du}{dx} = o$; ainsi la valeur de $\frac{dy}{dx}$ devra se présenter sous la forme $\frac{o}{o}$. Les points conjugués seront donc déterminés, comme on l'a déja vu par un exemple, en même tems que les points multiples, et par la règle énoncée ci-dessus.

3°. *Des limites d'une courbe dans le sens des ordonnées, et dans celui des abscisses.*

On sait déja que la tangente à la courbe, est parallèle à l'axe des abscisses aux points où la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est nulle, et que cette tangente est perpendiculaire au même axe aux points où la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est infinie, et que, réciproque-

ment, lorsque la tangente en un point d'une courbe, est parallèle, ou perpendiculaire à l'axe des abscisses, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est nulle ou infinie.

On déterminera donc les limites d'une courbe dans le sens des ordonnées, et dans le sens des abscisses, en posant successivement les équations $\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{0}=\infty$; ces équations combinées avec celle de la courbe, donneront les coordonnées de tous les points qui peuvent être des limites de cette courbe; mais il ne faudra pas conclure que tous les points ainsi trouvés répondent effectivement à des limites, et il n'y aura, en général, d'autre moyen de s'en assurer, que d'examiner le cours de la courbe vers chacun de ses points.

4°. *Des points d'inflexion et des points de rebroussement.*

D'abord soit $y=fx$ l'équation d'une courbe : comme on peut prendre i assez petit pour que le signe de $y'' \frac{i^2}{2}$ soit celui de $y'' \frac{i^2}{2}$ + le reste du développement, on voit que l'ordonnée $f(x \pm i)$ de la courbe, sera plus grande ou plus petite que l'ordonnée $y \pm y' i$ de la tangente, suivant que y'' sera positif
Fig. 17 et 18. ou négatif; en sorte que, dans le premier cas, la courbe tournera sa convexité vers l'axe des abscisses; et, dans le second, elle présentera sa concavité au même axe.

Fig. 19. Ainsi au point M où la courbe de concave devient convexe vers l'axe AX, point qu'on nomme *inflexion*, y'' doit changer de signe, ce qui exige qu'en ce point, y'' soit nul ou infini. C'est au reste ce qui va être énoncé plus généralement.

Soit $y=fx$ l'équation d'une courbe résolue par rapport

à y, et soient a et A l'abscisse et l'ordonnée d'un point m déterminé de cette courbe. L'ordonnée qui répond à l'abscisse $x=a+i$, c'est-à-dire, la fonction $f(a+i)$ pourra toujours être développée en une suite de cette forme

$$A+Bi^{\alpha}+Ci^{\beta}+Di^{\gamma}+Ei^{\delta}+\text{etc.},$$

α, β, γ, δ, etc., étant une suite d'exposans positifs et croissans, et le premier terme du développement étant l'ordonnée du point m. Les coefficiens A, B, C, D, etc. seront tous réels, si, comme nous le supposons ici, le point m que nous considérons, n'est pas un point conjugué.

Si l'exposant α est plus petit que l'unité, la valeur du $\frac{dy}{dx}$ qui n'est que $\frac{df(x+i)}{di}$ pour $i=0$, (pag. 117) sera infinie au point m; par conséquent la tangente à la courbe en ce point, sera perpendiculaire à l'axe des abscisses; si, au contraire, cet exposant est plus grand que l'unité, la valeur du $\frac{dy}{dx}$ sera nulle au point m, et la tangente à la courbe en ce point, sera parallèle à l'axe des abscisses; c'est ce qui peut arriver dans des points soit d'inflexion soit de rebroussement, comme nous le ferons voir par des exemples placés à la suite de la théorie. Si donc on suppose que l'on ait déterminé d'avance les points de la courbe, quels qu'ils soient, dans lesquels la tangente est perpendiculaire ou parallèle à l'axe des abscisses, et qu'il ne s'agisse plus maintenant que de ceux où la tangente est inclinée sur ce même axe, on aura $\alpha=1$, et le développement deviendra

$$A+Bi+Ci^{\beta}+Di^{\gamma}+Ei^{\delta}+\text{etc.}$$

Cela posé, en prenant pour i une très-petite quantité positive ou négative, cette série sera convergente, et elle donnera la valeur de $f(a+i)$, ou celle de $f(a-i)$; or il

se présente ici deux cas à examiner : 1°. celui où aucun des exposans β, γ, δ, etc., n'est une fraction de dénominateur pair ; 2°. celui où il se trouve de pareilles fractions parmi les exposans, en supposant toutes ces fractions β, γ, δ, etc., réduites à la plus simple expression, et alors ou les deux termes sont impairs, ou l'un est pair et l'autre impair.

Dans le premier cas, c'est-à-dire, si l'exposant β est nombre impair, ou une fraction dont les deux termes soient des nombres impairs, la courbe subira *une inflexion* au point m. En effet, si l'on conçoit une tangente à la courbe au point m, la différence entre l'ordonnée de cette tangente, et celle de la courbe, pour une abscisse $x = a + i$, différence qui se compte de la tangente, sera exprimée par

$$\Delta = Ci^{\beta} + Di^{\gamma} + Ei^{\delta} + \text{etc.} :$$

comme on pourra toujours prendre pour i une quantité positive ou négative assez petite pour que le signe du premier terme Ci^{β} décide du signe de la totalité de la série, ce premier terme changera de signe avec i, dans l'hypothèse actuelle ; donc la tangente qui était au-dessus de la courbe, à droite du point de tangence, par exemple, passera au-dessous de la courbe, à gauche du même point, ou *vice versâ* ; par conséquent la tangente coupera la courbe en m, et la courbe sera infléchie en ce point. Si le dénominateur de β étant toujours impair, le numérateur est pair, la courbe ne présentera rien de particulier, parce que, pour i positif et négatif, le terme Ci^{β} qui donne son signe au développement, sera toujours réel et de même signe ; ainsi la tangente sera toute entière au-dessus ou au-dessous de la courbe à droite et à gauche du point de tangence. Même conclusion dans le cas où β est un nombre entier pair.

Toutes les fois que l'exposant β est différent du nombre 2,

la valeur du $\frac{d^2y}{dx^2}$ est nulle ou infinie pour $x = a$; nulle si β surpasse 2, et infinie si β est < 2, en observant toujours que $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2 f(x+i)}{di^2}$ pour $i = 0$ et $x = a$ (pag. 117).

De ce qu'en tout point d'inflexion, la valeur du $\frac{d^2y}{dx^2}$ est nécessairement égale à zéro ou à l'infini, ainsi que nous venons de le démontrer, il s'ensuit que si l'on tire de l'équation de la courbe la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ sous la forme d'une fraction $\frac{M}{N}$, il faudra faire successivement $M = 0$ et $N = 0$; et, en combinant ces équations avec celle de la courbe, on déterminera les coordonnées de tous les points de cette courbe, qui *peuvent être* des points d'inflexion; parce que $\frac{d^2y}{dx^2}$ peut avoir une valeur nulle ou infinie en des points où il n'y ait pas inflexion. Il faudra ensuite discuter le cours de la courbe vers chacun de ces points, pour reconnaître s'ils répondent effectivement à des inflexions de la courbe.

Examinons maintenant le cas où, parmi les exposans β, γ, δ, etc., il se trouve des fractions de dénominateur pair, et alors les numérateurs correspondans ne peuvent être que des nombres impairs.

Il est évident que, dans ce cas, la valeur de l'une des fonctions $f(a+i)$, $f(a-i)$ est réelle, tandis que celle de l'autre est imaginaire; la courbe a donc des points d'un côté du point m, et elle n'en a pas du côté opposé; par conséquent ce point est ou un *point de rebroussement*, ou une simple limite de la courbe dans le sens des abscisses. Mais en un point de cette dernière espèce, la tangente à la courbe serait perpendiculaire à l'axe des abscisses, ce qui serait contre la supposition faite qu'on a déterminé d'avance les points de

la courbe, où la tangente est parallèle ou perpendiculaire à cet axe. Le point m est donc *un point de rebroussement.*

Réciproquement, lorsqu'une courbe doit avoir un rebroussement au point m dont l'abscisse $x=a$, l'inspection de la figure fait voir que l'ordonnée de la courbe doit avoir une valeur unique pour $x=a$, deux valeurs distinctes pour $x=a+i$, et devenir imaginaire pour $x=a-i$. Il faudra donc que l'équation de la courbe résolue par rapport à l'ordonnée, et que nous avons représentée plus haut par $y=fx$, renferme un radical pair de $x-a$, qui deviendra nul pour $x=a$, qui aura deux valeurs pour $x=a+i$, et qui sera imaginaire pour $x=a-i$: par conséquent le développement ci-dessus de $f(a+i)$ contiendra un radical pair de i, et, c'est ce qui introduit des fractions de dénominateur pair parmi les exposans β, γ, δ, etc. On observera que si, sous le radical pair, il se trouve $a-x$ au-lieu de $x-a$, l'hypothèse $x=a+i$ donnera des valeurs imaginaires, tandis que, pour $x=a-i$, on aura des valeurs réelles. Ainsi dans le premier cas, les deux branches qui forment le point de rebroussement seront à droite de ce point, et dans le second cas, elles seront à sa gauche.

Fig. 20. On a *un point de rebroussement de la première espèce*, lorsque les deux branches de la courbe laissent entre elles la tangente. Pour ce point, les deux valeurs de la différence,

$$\Delta = Ci^{\beta} + Di^{\gamma} + Ei^{\delta},$$

entre l'ordonnée de chacune des branches, et celle de la tangente pour une même abscisse i, quelque petite qu'elle soit, doivent être de différens signes, pour que la tangente de laquelle on compte ces différences, se trouve entre les deux branches ; condition qui ne peut être remplie analytiquement, qu'autant que l'exposant β dans le premier terme de Δ, sera une fraction ayant un dénominateur pair, afin

que Δ ait aussi un double signe, et prenne ainsi deux valeurs de signes contraires. Ainsi la forme de l'équation d'une courbe qui offre *un rebroussement de la première espèce*, doit être telle qu'après avoir changé x en $a+i$ ou en $a-i$, a étant l'abscisse du point de rebroussement, et effacé le terme sans i et celui de première puissance en i, le premier des termes restans, renferme une puissance fractionnaire de i, à dénominateur pair.

Passons maintenant *au point de rebroussement de la seconde espèce*, qu'on nomme ainsi, parce qu'il est formé de deux branches qui laissent au-dessus ou au-dessous d'elles la tangente en ce point. Il est visible que les deux valeurs de la différence Δ, pour une même valeur de i, quelque petite qu'elle soit, doivent avoir le même signe; ce qui ne peut arriver, à moins que le premier terme de la différence Δ qui donne son signe au développement, ne contienne une puissance entière de i, et que l'un des suivans n'ait deux signes. On voit donc que les équations des courbes qui offrent un rebroussement de la seconde espèce, doivent être telles qu'après avoir écrit $a+i$ ou $a-i$ pour x, a étant l'abscisse du point de rebroussement, et effacé les termes sans i et de première puissance de i, le premier terme du développement ordonné suivant les puissances de i, soit un terme de puissance entière de cet accroissement. Fig. 21.

Ainsi quant aux rebroussemens de la première espèce, la valeur du $\frac{d^2y}{dx^2}$ est toujours nulle ou infinie, puisqu'en ces points, l'exposant β étant toujours fractionnaire, $\frac{d^2f(a+i)}{di^2}$ qui, pour $i=0$, se réduit à $\frac{d^2y}{dx^2}$ (pag. 117) a pour l'un de ses termes $\beta(\beta-1)\,Ci^{\beta-2}$, et qu'ainsi, pour $\beta>2$, ce coefficient sera nul, tandis que pour $\beta<2$, il sera infini.

Quant aux points de rebroussemens de la seconde espèce, le calcul différentiel ne peut fournir aucune règle pour les trouver directement; les considérations précédentes en donnent la raison; car le terme qui doit contenir une puissance fractionnaire de i, dans le développement de $f(a+i)$ n'étant pas déterminé, on ne peut pas dire quel est le premier coefficient différentiel qui doit devenir infini.

Lorsque dans le rebroussement de la seconde espèce, le coefficient dans le premier terme de la différence Δ, sera positif, et que d'ailleurs les branches s'étendront dans la région des abscisses i positives, les deux branches seront au-dessus de la tangente, par rapport à l'axe des x; lorsqu'au contraire ce coefficient sera négatif dans le cas supposé, les deux branches tomberont au-dessous de cette tangente. Il est d'ailleurs facile de voir que les deux branches pourront s'étendre à droite ou à gauche du point de rebroussement, ainsi que nous l'avons expliqué à l'égard de celui de la première espèce.

Du reste, les points de rebroussemens des deux espèces, pouvant être considérés comme des points multiples, on connaît déja la règle qui les fera trouver.

On voit donc que le calcul différentiel, fournit des règles certaines pour trouver les points d'une courbe, qui peuvent être des points singuliers, lorsqu'on connaît l'équation de cette courbe; mais pour reconnaître si les points de la courbe, indiqués par le calcul différentiel, sont effectivement des points singuliers, ainsi que pour en reconnaître la nature, il n'y a pas de moyen plus assuré, du moins, en général, que discuter le cours de la courbe aux environs de ces points.

Nous allons ajouter quelques exemples à ceux que nous avons déja traités.

1°. Recherchons si la courbe de l'équation

$$ay^3 - x^3y - bx^3 = 0,$$

comporte des points multiples : on en déduit

$$(3ay^2 - x^3)y' - 3x^2(y+b) = 0,$$
$$6ayy'^2 - 6x^2y' - 6x(y+b) = 0,$$
$$6ay'^3 - 18xy' - 6y - 6b = 0,$$

en omettant les termes en y'', y'''.... qui disparaissent, ainsi qu'on l'a vu dans la théorie. On a donc les deux équations

$$3ay^2 - x^3 = 0, \quad x^2(y+b) = 0;$$

desquelles on tire $y = -b$, $x = \sqrt[4]{3ab^2}$ qui ne satisfont pas à la proposée ; puis $x = 0$, $y = 0$, solution de cette équation. L'origine peut donc être un point multiple. Pour ce point tous les termes de la dérivée du second ordre disparaissent; celle du troisième, devient

$$ay'^3 = b,$$

qui ne donnant pour y' qu'une seule racine réelle, apprend que la courbe n'a pas de point multiple.

2°. Soit

$$y^4 - x^5 + x^4 + 3x^2y^2 = 0,$$

d'où

$$2yy'(2y^2 + 5x^2) + 4x^3 - 5x^4 + 6y^2x = 0,$$

en posant

$$y(2y^2 + 3x^2) = 0, \quad x(4x^2 - 5x^3 + 6y^2) = 0,$$

on trouve que $x = 0$, $y = 0$ sont les seules solutions de ces deux équations et de la proposée. Les dérivées du second et du troisième ordre sont alors nulles d'elles-mêmes : celle du quatrième devient

$$y'^4 + 3y'^2 + 1 = 0,$$

dont les racines sont imaginaires : ainsi l'origine est un point conjugué.

3°. Soit

$$x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0:$$

après en avoir déduit les dérivées du premier et du second ordre,

$$-6a(y+a)yy' + 4x(x^2-a^2) = 0,$$
$$-6a(y+a)yy'' - 3a(2y+a)y'^2 + 6x^2 - 2a^2 = 0,$$

on posera

$$(y+a)y = 0, \qquad x(x^2-a^2) = 0,$$

et on trouvera que

$$y = 0 \text{ et } x = \pm a,$$
$$y = -a \text{ et } x = 0,$$

Fig. 2?. sont les seules solutions de ces équations et de la proposée. D'abord $x=0$ donne les racines $y=-a$ et $y=\frac{1}{2}a$, dont la première est double : au système de solutions $x=0$, $y=-a$ correspondent $y'=\frac{0}{0}$, et le point E qui est double : en second lieu $x=\pm a$ donne les points doubles D et D'. Au point E, on a $y'=\sqrt{\frac{2}{3}}$, et aux points D et D', $y'=\sqrt{\frac{4}{3}}$; on connaît donc en ces points les inclinaisons des branches sur l'axe des abscisses.

D'ailleurs les abscisses $x=0$, et $x=\pm a$ prises la première avec $y=\frac{1}{2}a$, et la seconde avec $y=-\frac{3}{2}a$, donnant $y'=0$, peuvent indiquer des *maxima* ou des *minima* d'ordonnées : pour $x=0$ la dérivée du second ordre donne $y''<0$, conséquemment l'ordonnée AF est un *maximum*. Pour les abscisses $x=\pm a$, on trouve $y''>0$, et conséquemment les ordonnées DH, $D'O$ sont des *minima*, parce que les plus grandes ordonnées négatives doivent être considérées comme

les plus petites, en tant qu'elles s'approchent davantage de l'infini négatif. Enfin $y' = \infty$, c'est-à-dire,

$$y(y+a)=0,$$

fera connaître les points K et G dans lesquels la tangente est parallèle à l'axe des y, et ces points correspondent à $y = -a$, et $x = \pm a\sqrt{2} = AC = AB$; en sorte que $CK = BG = AE$.

4°. Soit l'équation

$$x^4 + 2ax^2y - ay^3 = 0,$$

d'où

$$ay'(2x^2 - 3y^2) + 4x(x^2 + ay) = 0;$$

après avoir trouvé que l'origine seule peut être un point multiple, pour en reconnaître le degré de multiplicité, il faut recourir à la dérivée du troisième ordre, qui donne Fig. 23.

$$y' = 0, \quad y' = \pm\sqrt{2}.$$

Il y a donc en A un point triple. On aura les *minima* H et O, en posant

$$x(x^2 + ay) = 0,$$

il faut rejeter les valeurs $x = 0$, $y = 0$, qui donnent $y' = \frac{0}{0}$, et prendre $x^2 = -ay$, abscisse qui reportée dans l'équation de la courbe, donne $y = 0$, $y = -a$: on prendra donc $y = -a$ et $x = \pm a$: ces coordonnées donnent $y'' > 0$: d'où on conclut deux *minima* aux points H et O. On trouvera les limites G et F, en posant $y' = \infty$, c'est-à-dire,

$$2x^2 - 3y^2 = 0,$$

cette équation combinée avec celle des courbes, donne

$$x = \pm \tfrac{4}{9} a\sqrt{6}, \quad y = -\tfrac{8}{9} a.$$

5°. En partant de l'équation

$$y^4 - axy^2 + x^4 = 0,$$

on a les dérivées

$$2yy'(2y^2 - ax) + 4x^3 - ay^2 = 0,$$
$$2(6y^2 - ax)y'^2 - 4ayy' + 12x^2 = 0,$$
$$24yy'^3 - 6ay'^2 + 24x = 0,$$

en omettant les termes de y'', y''' nuls par leurs coefficiens, lorsqu'on cherche les points multiples : on trouve à l'origine un point triple pour lequel les tangentes sont

$$y' = \pm 0, \quad y' = \infty.$$

Ainsi les deux axes sont tangens à la courbe en ce point.

6°. L'équation

$$y^4 + x^4 - 3ay^3 + 2bx^2y = 0,$$

est encore celle d'une courbe qui a un point triple à l'origine : nous la laissons à discuter.

Lorsque l'équation est explicite, c'est-à-dire, résolue par rapport à l'une des variables, la recherche des points multiples, par exemple, devient plus facile ; ainsi l'équation étant résolue par rapport à y, il arrive que, pour l'abscisse d'un point multiple, un radical disparaît par son coefficient ; le degré de ce radical est égal au nombre des branches qui se coupent en ce point, et l'exposant de son coefficient montre s'il y a simple intersection ou osculation au point multiple. C'est ce que nous allons encore éclaircir par les exemples suivans.

C'est ainsi que

$$y = (x - 6)\sqrt{x - 3} + 3,$$

perd le radical pour $x = 6$, et comme ce radical ne dispa-

raît pas dans y', on en conclut que $x=6$ et $y=3$ sont les coordonnées d'un point double. On trouvera les *maxima* et *minima*, et la limite.

Il y a un point conjugué à l'origine des coordonnées dans la courbe de l'équation

$$y=x\sqrt{x-b};$$

parce que y est imaginaire pour les points voisins à droite et à gauche de l'origine.

L'équation

$$y=(x-a)^2\sqrt{x-b}+c,$$

est celle d'une courbe qui a, pour l'abscisse $x=a$, un point double, et en ce point deux valeurs de y'. Si l'on fait disparaître le radical, par l'élévation au carré (pag.   ), pour avoir les valeurs multiples de y', on trouve qu'au point $x=a$ et $y=c$, les deux valeurs de y' ne diffèrent que par le signe.

L'équation

$$y=(x-a)^3\sqrt{x-b}+c,$$

est celle d'une courbe qui a un point double pour $x=a$, et $y=c$; comme pour ce point, les quantités y, y' et y'', ont les mêmes valeurs pour les deux branches, ces deux branches ont même cercle osculateur au point double.

Nous passerons à la recherche des points d'inflexion.

On s'exercera d'abord à chercher ceux des courbes représentées par les équations $y=b+(x-a)^{\frac{3}{5}}$, $y=x^2+\sqrt[3]{(x-1)^5}$, $y=x^3+x^2-\sqrt[3]{x^7}$, si cependant elles en fournissent. Nous discuterons plus particulièrement la courbe de l'équation

$$y=(x-1)(x-2)(x-3),$$

Fig. 24. qui coupe l'axe des x en R, R' et R'', dont on connaît les abscisses; on en déduit

$$\frac{dy}{dx} = (x-1)(x-2)+(x-1\ (x-3)+(x-2)(x-3),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x-12.$$

L'égalité à zéro de $6x-12$, donnera $x=2$ pour l'abscisse d'un point d'inflexion : ce point est en R'. En effet, la tangente en R' a pour équation (   )

$$q = \frac{dy}{dx}(p-2),$$

p étant l'abscisse et q l'ordonnée d'un point quelconque de la tangente, et $x=2$ avec $y=0$ étant les coordonnées du point de tangence R' : or, pour ce point, $\frac{dy}{dx} = -1$, donc

$$q = -(p-2).$$

Faisons $x = 2+\frac{1}{10} = \frac{21}{10}$ et $x = 2-\frac{1}{10} = \frac{19}{10}$, et désignons par Y les ordonnées correspondantes de la courbe ; nous aurons

pour $x = p = \frac{21}{10} \ldots q = -\frac{100}{1000} \ldots Y = -\frac{99}{1000}$,
pour $x = p = \frac{18}{10} \ldots q = \quad \frac{100}{1000} \ldots Y = \quad \frac{99}{1000}$,

et on conclut qu'à la droite du point R' et à la distance $\frac{1}{10}$, l'ordonnée de la tangente est plus grande que celle de la courbe, et qu'aussi à la gauche de R' et à la même distance, l'ordonnée de la tangente excède celle de la courbe ; ainsi la tangente en R' coupe la courbe en ce point, ce qui est le caractère d'une inflexion. On peut encore observer que l'ordonnée de la courbe, avant ou après le point R', est représentée par $\frac{dy}{dx}i + \frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{i^3}{1.3} +$ etc., à cause de $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, et que celle de la tangente, pour la même abscisse, l'est par

$\frac{dy}{dx}i$; d'où l'on conclut que l'ordonnée de la tangente est, abstraction faite des signes, plus grande que celle de la courbe. Il n'arrive rien de semblable en R'', ainsi qu'on peut s'en assurer, en faisant $x = p = \frac{31}{10}$ et $= \frac{29}{10}$ dans l'équation de la courbe et dans celle de la tangente qui, pour ce point, est

$$y = 2(p - 3);$$

car on trouve

$$\text{pour} \quad x = p = \tfrac{31}{10} \ldots q = \tfrac{200}{1000} \ldots Y = \tfrac{231}{1000},$$
$$\text{pour} \quad x = p = \tfrac{29}{10} \ldots q = -\tfrac{200}{1000} \ldots Y = -\tfrac{171}{1000},$$

et conséquemment à droite et à gauche du point R'', la courbe laisse la tangente en R'' d'un même côté. La même chose arrive en R. Nous ajouterons que les tangentes en R et R'' sont parallèles.

L'équation proposée revient à la suivante :

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 - y = 0,$$

de laquelle on tire

$$(3x^2 - 12x + 11)\frac{dx}{dy} - 1 = 0, \text{ d'où } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 - 12x + 11};$$

et en second lieu,

$$(3x^2 - 12x + 11)\frac{d^2x}{dy^2} + (6x - 12)\frac{dx^2}{dy^2} = 0,$$

qui donne

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{6x - 12}{(3x^2 - 12x + 11)^3}.$$

On aura donc les points d'inflexion par rapport à l'axe des y, s'il y en a, en posant

$$6x - 12 = 0, \quad 3x^2 - 12x + 11 = 0.$$

La première de ces équations donne encore $x=2$: on tire de la seconde

$$x=2\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{3}=2\pm0,574,$$

et conséquemment.

$$x=2,574,\quad x=1,426.$$

Si l'on fait $x>2,574$, par exemple $x=2,6$, on trouve $\frac{d^2x}{dy^2}$ négatif, et pour $x<2,574$, ou $=2,4$, on trouve $\frac{d^2x}{dy^2}$ positif. Ainsi, au point $x=2,574$, il y a passage de la convexité à la concavité, par rapport à l'axe des y, et cependant le signe du $\frac{d^2y}{dx^2}$ ne change pas en même tems que celui du $\frac{d^2x}{dy^2}$, par les substitutions $x=2,6$ et $x=2,4$, ce qui prouve qu'il n'y a pas inflexion au point $x=2,574$; ou qu'en ce point, une tangente ne coupe pas la courbe. Un point d'inflexion est absolu par sa nature, c'est-à-dire, qu'il reste tel, quel que soit l'axe auquel on le rapporte, tandis qu'en passant d'un axe à un autre, il y a changement d'aspect duquel résulte, dans les courbes à ondulations, cette succession de concavité et de convexité sans passage par l'inflexion. La valeur $x=2\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}=2\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ donne $\frac{dx}{dy}=\infty$, ou..... $\frac{dy}{dx}=0$, en sorte qu'en ces points la tangente est parallèle à l'axe des abscisses, et l'ordonnée est *maximum*.

Enfin, nous ferons remarquer qu'immédiatement à droite et à gauche du seul point d'inflexion R', la courbe présente sa concavité à l'axe des x, quoiqu'il y ait changement de signe du $\frac{d^2y}{dx^2}$ qui de négatif qu'il est à gauche de R', devient positif à droite du même point. Ce cas d'exception paraît n'avoir lieu que lorsque l'axe auquel on rapporte le point

d'inflexion passe par ce point. Ainsi, pour l'axe AX, la courbe KML concave de K en M, devient convexe de M en L, tandis que de part et d'autre de M, elle présente sa concavité à l'axe $A'X'$ mené par le point M d'inflexion. Fig. 25.

On pourra étendre cette discussion à la courbe de l'équation

$$y=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

Passons à la discussion de l'équation

$$y^4-96a^2y^2+100a^2x^2-x^4=0,$$

laquelle, résolue par rapport à x, donne

$$y=\pm\sqrt{\{48a^2\pm\sqrt{2304a^4-100a^2x^2+x^4}\}}.$$ Fig. 26.

Pour découvrir d'abord les limites de la courbe dans le sens des ordonnées, ou les plus grandes et les moindres ordonnées, on déduira de la proposée le coefficient différentiel

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-50a^2x}{y^3-48a^2y},$$

lequel égalé à zéro, donnera

$$x^3-50a^2x=0,\quad \text{d'où}\quad x=0,\ x=\pm 5a\sqrt{2}.$$

La première valeur de x, portée dans la proposée, donne $y=0$, $y=\pm 4a\sqrt{6}$. Ces deux dernières valeurs de y sont des coordonnées des points D et D', et on trouvera facilement qu'elles sont toutes deux des *maxima*. Prenons maintenant $x=0$ avec $y=0$: pour ce système de coordonnées, on trouve $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$, ce qui annonce, en général, un point multiple à l'origine A. Pour avoir les valeurs du $\frac{dy}{dx}$, on passera à la différentielle seconde qui est

$$(y^3-48a^2y)\frac{d^2y}{dx^2}+(3y^2-48a^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(50a^2-3x^2)=0,$$

et qui, pour $x=0$, $y=0$, donne

$$\frac{dy}{dx}=\pm\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Le point A est donc l'intersection de deux branches qui font avec l'axe des abscisses, des angles ayant pour tangentes trigonométriques $+\frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$ et $-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Les deux autres racines $x=\pm 5a\sqrt{2}$, portées dans la proposée, rendent y imaginaire.

Maintenant, pour obtenir les limites de la courbe dans le sens des abscisses, c'est-à-dire, les plus grandes et les moindres abscisses, on égalera à zéro le dénominateur de la valeur de $\frac{dy}{dx}$, puisqu'en ces points les tangentes sont perpendiculaires à l'axe des abscisses, et on trouvera

$$y^3-48a^2y=0,\quad \text{d'où}\quad y=0,\quad y=\pm 4a\sqrt{3}.$$

La première valeur $y=0$ portée dans l'équation de la courbe, donne $x=0$, $x=\pm 10a$. Les coordonnées $x=0$, $y=0$, sont, ainsi qu'on l'a déja vu, celles du point multiple A, auquel il ne peut y avoir de tangentes perpendiculaires à l'axe, et, en effet, on sait déja que, pour ces valeurs, $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$. Les systêmes de coordonnées $y=0$, $x=\pm 10a$, répondent aux points I et I', intersections de la courbe avec l'axe des abscisses.

Les deux dernières valeurs $y=\pm 4a\sqrt{3}$, donnent...... $x=\pm 6a$, $x=\pm 8a$: les coordonnées $y=\pm 4a\sqrt{3}$ et $x=\pm 6a$ font connaître les points F, F', F'', F''', et celles-ci, $y=\pm 4a\sqrt{3}$, $x=\pm 8a$, désignent H, H', H'', H'''. Tous ces points sont sur deux parallèles à l'axe des x, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de cet axe, à la même distance $y=4a\sqrt{3}$.

Passons à la recherche des points d'inflexion. On a

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(3x^2-50a^2)-(3y^2-48a^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y^3-48a^2y};$$

mettant pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur, et faisant disparaître le dénominateur, on trouvera

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(3x^2-50a^2)(y^3-48a^2y)^2-(3y^2-48a^2)(x^3-50a^2x)^2}{(y^3-48a^2y)^3}.$$

On peut donner au numérateur de la fraction la forme suivante :

$$y^2(y^2-48a^2)^2(3x^2-50a^2)-x^2(x^2-50a^2)^2(3y^2-48a^2);$$

mais comme l'équation proposée revient à celle-ci

$$(y^2-48a^2)^2-(x^2-50a^2)^2+196a^4=0,$$

si on tire la valeur de $(y^2-48a^2)^2$ pour la substituer dans $\frac{d^2y}{dx^2}$, on trouvera après les réductions

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x^2-50a^2)^2(25y^2-24x^2)+98a^2y^2(3x^2-50a^2)}{y^3\{(x^2-50a^2)^2-196a^4\}}.$$

D'abord, le numérateur devient nul par $x=0$, $y=0$, ce qui annonce une inflexion au point A : en effet, pour deux abscisses AP, AP', moindres que $\pm 6a$, égales et de signes contraires, l'équation de la courbe donne quatre valeurs de y, dont deux, savoir : PM, $P'M'$ sont aussi égales et de signes contraires, en sorte que $\frac{d^2y}{dx^2}$ change de signe

par le facteur y^3 du dénominateur, en passant du point M au point M'.

Généralement de l'hypothèse

$$(x^2 - 50a^2)^2 (25y^2 - 24x^2) + 98a^2y^2 (3x^2 - 50a^2) = 0,$$

on déduit

$$y^2 = \frac{24x^2 (x^2 - 50a^2)^2}{25 (x^2 - 50a^2)^2 + 98a^2 (3x^2 - 50a^2)}.$$

Cette valeur et son carré reportés dans l'équation de la courbe, donnent, après des réductions pénibles, une équation du douzième degré, qui a quatre racines égales chacune à zéro ; et après la division par x^4, on retombe sur cette équation du huitième degré

$$x^8 - 14412a^4x^4 + 902000a^6x^2 - 17280000a^8 = 0,$$

laquelle, sous l'hypothèse $x^2 = z$, se rabaisse au quatrième degré, et devient

$$z^4 - 14412a^4z^2 + 902000a^6z - 17280000a^8 = 0.$$

En remplaçant z par $2t$, on parvient à cette transformée

$$t^4 - 3603a^4t^2 + 112750a^6t - 1080000a^8 = 0,$$

dont les coefficiens sont moindres que ceux de l'équation précédente; et on fera disparaître a en écrivant au au lieu de t, ce qui donnera

$$u^4 - 3603u^2 + 112750u - 1080000 = 0.$$

Cette équation a deux racines réelles positives, l'une entre 23 et 24, et l'autre entre 24 et 25, et deux racines réelles négatives numériquement égales à celles-là : donc l'équation en x a quatre de ces racines imaginaires, et parmi les quatre

réelles, deux sont positives, et deux autres négatives et numériquement égales à celles-là. Il s'agit donc de découvrir les deux racines réelles positives, ou, au moins, les deux nombres entiers consécutifs entre lesquels chacune de ces racines est comprise. La substitution $x = 9a$ dans l'équation du huitième degré, donne un résultat positif, et la substitution $8a$ donne un résultat négatif. Il existe donc une racine réelle positive entre $8a$ et $9a$, à laquelle répondent des ordonnées réelles; et comme d'ailleurs de $8a$ à $9a$, le signe du $\frac{d^2y}{dx^2}$ change, il se trouve un point d'inflexion en K entre H et I dont les abscisses sont $8a$ et $10a$, et conséquemment on peut affirmer l'existence de quatre points d'inflexion K, K', K'', K''', placés deux à deux symétriquement par rapport à chacun des axes. Les deux substitutions $5a$ et $6a$ donnent, la première, un résultat positif, et la seconde un résultat négatif; d'où on conclut l'existence d'une autre racine réelle positive, entre $5a$ et $6a$, abscisse à laquelle correspondent deux ordonnées réelles; mais pour reconnaître si cette abscisse répond à un point d'inflexion, il faut examiner le signe du $\frac{d^2y}{dx^2}$ de $x=5a$ à $x=6a$: c'est ce que nous laisserons à faire.

Nous passerons enfin aux points de rebroussement, et nous considérerons la courbe de l'équation

$$y = x \pm x\sqrt{x}.$$

Pour $x=0$, on a $y=0$; l'origine est donc un point de cette courbe; pour des abscisses négatives, les ordonnées sont imaginaires; mais à des abscisses positives quelconques répondent deux ordonnées réelles. On construira d'abord la ligne droite AN donnée par $PN=x$, et, à partir du point N et dans la direction PN, on portera les longueurs..... Fig. 27.

$NM = x\sqrt{x}$, $Nm = -x\sqrt{x}$, et les points M et m seront à la courbe. Pour la branche AM, on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = +\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}},$$

et pour la branche Am,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Ainsi la branche supérieure présente sa convexité à l'axe AX, et la branche inférieure lui présente sa concavité; le point A peut donc être un point de *rebroussement de la première espèce*. Pour s'en assurer, on différentiera l'équation de la courbe, délivrée de radicaux, ce qui donnera

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 2(y-x)}{2(y-x)};$$

et, comme à un point de rebroussement, ainsi qu'à un point multiple, on doit avoir $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, on posera

$$3x^2 + 2(y-x) = 0, \quad y - x = 0;$$

d'où l'on tire $x = 0$, $y = 0$, valeurs qui satisfont à la proposée. L'origine est donc un point de rebroussement; mais en ce point,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}} = \infty:$$

donc le rebroussement est de la première espèce (pag. 292 et 293).

La courbe représentée par

$$y^2 = x^5, \quad \text{d'où } y = \pm x^{\frac{5}{2}},$$

offre aussi un rebroussement de la première espèce au point $x = 0$, et on a pour ce point

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Pour donner l'exemple d'un rebroussement de la seconde espèce, prenons l'équation

$$y = axx \pm bxx\sqrt{x}.$$

Fig. 28.

Cette courbe n'a pas de cours dans la région des abscisses négatives; elle commence du côté des abscisses positives à l'origine. On construira d'abord $PN = axx$, et le lieu des points N sera une parabole; puis on portera au-dessus et au-dessous du point N et dans le prolongement de PN, les longueurs $NM = bx^2\sqrt{x}$, et $Nm = -bx^2\sqrt{x}$; les points M et m ainsi déterminés, seront à la courbe. Pour la branche AM on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a + \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{5}{2} b\sqrt{x},$$

et pour la branche Am,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a - \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{5}{2} b\sqrt{x};$$

en sorte qu'à une petite distance du point A, les deux courbes présentent en même tems leur convexité à l'axe des abscisses, et on remarque que la branche inférieure aura un point d'inflexion. A l'abscisse $x = 0$, correspondent

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \infty;$$

d'où on conclut un rebroussement de la seconde espèce en A (pag. 293 et 294). et il arrive en effet que la tangente en ce point, laquelle est l'axe des x, laisse les deux branches au dessus d'elle.

La courbe résultante de l'équation

$$y = a\sqrt[3]{x} \pm b\sqrt{x}$$

aurait un point de rebroussement de la seconde espèce au point $x = 0$, et on trouverait pour ce point

$$\frac{dy}{dx} = \infty, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \infty, \text{ etc.}$$

On rencontre, dans la famille des courbes représentées par cette équation très-simple,

$$y = b + c\,(x - a)^m,$$

des exémples de presque tous les cas que nous venons d'examiner.

Le centre du cercle osculateur, tombe toujours du côté de la concavité; or au point d'inflexion, il y a, en général, changement de signe de y'', donc $y'' = \infty$ ou $= 0$, et $r = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ devient 0 ou ∞ : dans le premier cas, les rayons de courbure passent de la convergence à la divergence, ou réciproquement; dans le second, ils diminuent jusqu'au point d'inflexion. Même conclusion au point de rebroussement de la première espèce. Mais dans les courbes qui offrent un rebroussement de la seconde espèce, le centre de courbure restant toujours du même côté, le rayon du cercle osculateur en ce point, prend une valeur qui dépend de la courbure de l'élément commun aux deux branches.

Voyez l'*Analyse des Lignes courbes, par Cramer*, et le chapitre Ier. de la deuxième partie d'un excellent ouvrage ayant pour titre : *Traité élémentaire du Calcul des inéquations, par F. N. Canard, Professeur de Mathématiques transcendantes au Lycée de Moulins.*

CHAPITRE XX.

Des Courbes polaires.

Nous commencerons par rechercher les expressions des sous-tangentes, sous-normales, et les équations de la tangente et de la normale d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires.

Soit une courbe *AS* rapportée à des coordonnées polaires ; soient ρ le rayon vecteur *FM* et φ l'angle qu'il fait avec l'axe des abscisses : le point *F* de départ des rayons vecteurs étant en même tems l'origine des coordonnées rectangulaires, on a Fig. 29.

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \text{tang.}\, \varphi = \frac{y}{x},$$

d'où

$$y = \rho \sin \varphi, \qquad x = \rho \cos \varphi.$$

Ainsi, l'équation de la courbe étant

$$y = fx,$$

x et y et ρ seront des fonctions de φ que nous prendrons pour variable principale. Ainsi $\frac{dy}{dx}$ rapportée à l'hypothèse de x variable principale, doit être remplacée par... $\dfrac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}$, d'après la relation $(y') = \frac{y'}{x'}$, en prenant φ au lieu

de t (chap. VII). Or

$$\frac{dy}{d\varphi} = \sin\varphi \frac{d\rho}{d\varphi} + \rho\cos\varphi$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \cos\varphi \frac{d\rho}{d\varphi} - \rho\sin\varphi;$$

on aura donc

$$\text{sous-tang} = y\frac{dx}{dy} = \rho\sin\varphi \frac{\cos\varphi \frac{d\rho}{d\varphi} - \rho\sin\varphi}{\sin\varphi\frac{d\rho}{d\varphi} + \rho\cos\varphi} = TP..(1)$$

et

$$\text{sous-nor} = y\frac{dy}{dx} = \rho\sin\varphi \frac{\sin\varphi \frac{d\rho}{d\varphi} + \rho\cos\varphi}{\sin\varphi\frac{d\rho}{d\varphi} - \rho\sin\varphi} = PN..(2)$$

Nous avons trouvé cette équation de la tangente (pag. 215)

$$q - y = \frac{dy}{dx}(p - x),$$

x et y étant les coordonnées du point de tangence, q et p celles d'un point quelconque de la tangente : on aura donc aussi

$$q = \gamma\sin\omega,\quad p = \gamma\cos\omega,$$

γ étant le rayon vecteur pour l'un quelconque des points de la tangente, et ω l'angle qu'il fait avec l'axe AX : substituant ces valeurs et celles données ci-dessus de y, x, $\frac{dy}{dx}$, on aura l'équation de la tangente en coordonnées polaires. On trouverait de la même manière celle de la normale.

L'angle φ que fait le rayon vecteur en un point, avec l'axe AX, étant connu, puisque $\tang\varphi = \frac{y}{x}$, si on nomme ζ

l'angle *TMF* entre le rayon vecteur et la tangente, et α l'angle de la tangente avec l'axe, à cause de tang $\alpha = \frac{dy}{dx} = y'$, on a

$$\text{tang}\, \mathit{6} = \text{tang}\, (\varphi - \alpha) = \frac{y - xy'}{x + yy'};$$

mais lorsque φ est variable principale, il faut remplacer y' par $\frac{y'}{x'}$, et on trouve (chap. VII)

$$\text{tang}\, \mathit{6} = \frac{yx' - xy'}{xx' + yy'},$$

mais des relations $y = \rho \sin \varphi$, $x = \rho \cos \varphi$, on tire par la différentiation,

$$y' = \rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi, \quad x' = \rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi,$$

en désignant $\frac{d\rho}{d\varphi}$ par ρ' : donc

$$xx' = \rho\rho' \cos^2\varphi - \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi$$
$$yy' = \rho\rho' \sin^2\varphi + \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi$$
$$yx' = \rho\rho' \sin \varphi \cos \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi$$
$$xy' = \rho\rho' \sin \varphi \cos \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi,$$

d'où on déduit

$$xx' + yy' = \rho\rho', \quad yx' - xy' = -\rho^2,$$

et conséquemment

$$\text{tang}\, \mathit{6} = -\frac{\rho}{\rho'}.$$

Dans la figure 30, on aurait $\alpha = \varphi + \beta$, d'où $\beta = \alpha - \varphi$, et Fig. 30. on trouverait

$$\text{tang}\, \beta = \frac{\rho}{\rho'}.$$

Fig. 29. Menons par F une perpendiculaire au rayon vecteur, terminée à la tangente et à la normale en T' et N'; on pourra prendre FT' pour la sous-tangente, et FN' pour la sous-normale. Or, le triangle $FT'M$ rectangle en $T'FM$, donne

$$FT' = FM \times \tang \beta = \frac{\rho^2}{\frac{d\rho}{d\varphi}} = \text{sous-tang}$$

$$\text{D'ailleurs } FN' = \frac{FM^2}{FT'} = \rho^2 \frac{\frac{d\rho}{d\varphi}}{\rho^2} = \frac{d\rho}{d\varphi} = \text{sous-norm.}$$

On nomme *spirale* une courbe coupée en une infinité de points par toute ligne menée par un point fixe ou pôle. Les spirales composent un ordre de courbes transcendantes remarquables par leur forme et leur propriété ; ces sortes de courbes exigent, en quelque sorte, l'emploi des coordonnées polaires.

Nous considérerons d'abord la courbe imaginée par *Conon de Syracuse*, et qu'on appelle *spirale d'Archimède*, parce que ce géomètre en découvrit les principales propriétés.

Fig. 31. La *spirale d'Archimède* est engendrée par un point M qui se meut sur le rayon AO, tandis que ce rayon tourne lui-même autour du centre A, de telle manière que, dans des tems égaux, les espaces parcourus par le point décrivant M sur le rayon à partir de A, sont proportionnels aux angles décrits par le rayon AO, et comptés de sa première position AC, en sorte que le point M étant arrivé en O, le rayon AO qui a décrit le cercle, est revenu en AC, et le point M est en C. Le point décrivant continuant à se mouvoir uniformément sur le rayon indéfiniment prolongé, et ce rayon faisant en même tems un nombre indéfini de révolutions, la courbe AMC se prolongera par des circonvolutions autour du point A. La propriété de cette courbe consiste donc en ce que la longueur AM est

au rayon AO ou AC, comme l'arc CO est à la circonférence de AC. On a donc

$$AM : AO :: CO : \text{cir } COQC.$$

Soient $AC = a$, $AM = \rho$, φ l'angle rapporté au rayon 1 entre le rayon vecteur AM et la ligne fixe AC; 2π la circonférence du rayon 1 : la proportion précédente donnera

$$2\pi\,\rho = a\varphi, \quad \text{d'où } \rho = \frac{a\varphi}{2\pi};$$

ainsi, les révolutions successives du rayon AC donnent $\varphi = 2\pi$, 4π, 6π....., de sorte que le rayon vecteur augmente de a à chaque révolution.

De l'équation ci-dessus on tire par la différentiation,

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{a}{2\pi}:$$

donc la sous-normale est constante pour tous les points de la courbe.

La sous-tangente

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{a}{2\pi}\varphi^2 = \varphi\rho = AT',$$

elle est donc égale à la longueur de l'arc de cercle qui mesure l'angle MAC, et qui est décrit du rayon $AM = \rho$. Lorsque $\varphi = 2\pi$, la sous-tangente $= 2\pi \cdot a =$ la circonférence du cercle générateur. On se rappellera que la sous-tangente AT' et la sous-normale AN' sont comptées de A sur une perpendiculaire en A au rayon vecteur AM. On a encore

$$\text{tang } AMT' = \text{tang } \beta = \frac{\rho}{\rho'} = \rho\frac{d\varphi}{d\rho} = \varphi;$$

ainsi l'angle β croît sans cesse; et comme ce n'est qu'après une infinité de révolutions du rayon vecteur, que φ devient infini, il s'ensuit que l'angle droit est la limite de β.

La spirale que nous venons de considérer, n'est qu'un cas particulier des courbes que représente l'équation

$$\rho = A\varphi^n,$$

A étant une constante : lorsqu'on fait $n = -1$, l'équation précédente qui devient

$$\rho\varphi = a,$$

représente la *spirale hyperbolique* ainsi nommée à cause de l'analogie de son équation avec

$$xy = m^2.$$

Fig. 32. Pour concevoir la génération de cette courbe, soient menées les droites FX, FY perpendiculaires entre elles, et soient décrits du centre F des arcs tels que PM égaux en longueur à une ligne donnée $FD = a$: les extrémités M de ces arcs, sont à la courbe en question dont on trouve l'équation par cette proportion,

$$Fg : gh :: FM : MP,$$

laquelle, en posant

$$Fg = 1, \; FM = \rho, \; gh = \varphi',$$

donne

$$\rho\varphi' = a, \quad \text{d'où } \rho = \frac{a}{\varphi'}.$$

On remarquera que le rayon de l'arc $= a$ devenant très-petit, on est obligé de prendre des multiples de la circonférence de ce rayon, et que pour avoir le rayon vecteur ρ correspondant, il faut prendre pour φ' les mêmes multiples de sa circonférence. Il est clair, d'après cela, que le point

F est, en quelque sorte, un *point asymptote de la courbe*, puisque celle-ci tend toujours vers F sans pouvoir l'atteindre. Lorsque le rayon de l'arc $= a$, devient très-grand, l'arc PM tend à devenir parallèle et égal à FD, ce qui n'arrive qu'à la limite des accroissemens du rayon FP. Ainsi la parallèle DS à FY est asymptote de la spirale.

A l'effet de compter l'angle φ' de l'axe FX, nous remplacerons φ' par $\frac{1}{2}\pi - \phi$, $\frac{1}{2}\pi$ étant l'angle droit, et nous aurons

$$\rho = \frac{a}{\frac{1}{2}\pi - \varphi};$$

donc

$$FT' = \text{sous-t} = a, \quad \text{tang}\,\beta = \text{tang}\,FMT' = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi = \varphi'$$

l'angle β croît donc encore sans cesse, et il a pour limite l'angle droit.

La *spirale logarithmique* a pour équation

$$\rho = a^{\varphi},$$

en comptant l'angle φ de l'axe FX et au-dessus et désignant FM par ρ. Pour $\varphi = 0$, on a $\rho = FR = 1$: φ augmentant indéfiniment, le rayon vecteur ρ augmente indéfiniment, mais en supposant $a > 1$. Si l'on prend φ négatif, c'est-à-dire, si l'on compte φ de l'axe FX et au-dessous, auquel cas l'équation devient Fig. 33.

$$\rho = \frac{1}{a^{\varphi}};$$

on retrouve d'abord $\rho = 1$ pour $\phi = 0$, puis l'arc φ croissant, ρ diminue, et les extrémités de ρ donnent la portion RKF de la logarithmique qui n'atteint le point F que pour $\varphi = \infty$. On trouve

$$\text{sous-tang} = FT' = \frac{\rho}{la}, \quad \text{tang}\,\mathcal{C} = \frac{1}{l.a}.$$

Si l'on prend pour a la base des logarithmes népériens, la sous-tangente est égale au rayon vecteur, et l'angle FMT' est constamment égal à 50°.

Le nom de cette courbe lui vient de ce que le logarithme du rayon vecteur est égal, ou plutôt proportionnel à l'arc φ qu'il fait avec une droite fixe. Il faut encore distinguer entre la *spirale logarithmique* et *la courbe logarithmique* que nous considérerons bientôt.

La spirale parabolique a pour équation

$$\rho = a \pm \sqrt{p\varphi};$$

de sorte que la différence $\rho - a$ est moyenne proportionnelle entre la ligne donnée p et l'arc variable φ du rayon vecteur avec une droite fixe. On trouvera facilement la forme de cette courbe.

Fig. 34. Nous appliquerons ces formules à la *courbe trisectrice*.... $AKCGFLICA$, ainsi nommée, parce qu'elle jouit de cette propriété que si de A on mène un rayon à un point quelconque M de la circonférence qui a son centre en C et pour rayon CA, et si par le centre C et le point K où le premier rayon coupe la courbe, on mène la droite CKm, l'arc Am est le tiers de l'arc AmM. Cette courbe donne la trisection des angles de o à trois circonférences.

Si de l'extrémité A du rayon CA, comme centre, avec ce rayon on décrit une circonférence $CRNC$, si l'on mène CR, et qu'on prenne sur cette droite $RL = RK = CA$, les points L et K seront à la trisectrice. On a donc

$$CR = CL - LR = CK + KR:$$

mais le triangle isocèle RAC donne

$$CR : \sin RAC :: AC : \sin \phi,$$

φ étant l'angle RCA; or $\sin RAC = \sin 2\varphi$; donc pour $CA = 1$, $CR = \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi} = 2 \cos \varphi$: si donc on désigne CL et CK par ρ, on aura cette équation de la trisectrice,

$$2 \cos \varphi = \rho - 1 = \rho + 1, \quad \text{ou } 2 \cos \varphi = \rho \pm 1,$$

c'est-à-dire,

$$\rho = 2 \cos \varphi \pm 1,$$

en observant que le signe supérieur se rapporte à la portion $CIFGC$, et le signe inférieur à la petite feuille $CKAC$. Pour $\varphi = 0$, on a $\rho = 3$ et $\rho = 1$, c'est-à-dire, les longueurs CF, CA : à $\varphi = 100^d$, correspondent $\rho = CH = 1$, $\rho = Ch = -1$.

L'expression générale de la sous-tangente, savoir :

$$\text{sous-tang} = -\frac{\rho^2 \, d\varphi}{d\rho},$$

devient

$$\text{sous-tang} = +\frac{(2 \cos \varphi \pm 1)^2}{2 \sin \varphi}.$$

Pour 100^d, c'est-à-dire, aux points H et h, cette sous-tangente est $\frac{1}{2}$, longueur qu'il faut porter de C en T.

La formule générale de la sous-normale, c'est-à-dire,

$$\text{sous-norm} = -\frac{d\rho}{d\varphi},$$

devient pour la trisectrice, et pour $\varphi = 100^d$

$$\text{sous-norm} = -2 \sin \varphi = -2$$

ainsi la sous-normale en H et h, est égale au diamètre du cercle.

Pour avoir l'équation de la trisectrice aux coordonnées rectangulaires, on observera que de

$$y = \rho \sin \varphi, \quad x = \rho \cos \varphi,$$

on tire

$$\rho = \sqrt{y^2 + x^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}};$$

reportant ces valeurs de ρ et de $\cos\varphi$ dans l'équation polaire, faisant disparaître le radical, et réduisant, on trouvera pour équation aux coordonnées rectangulaires,

$$y^4 + (2x^2 - 4x - 1)\,y^2 + x^2\,(x^2 - 4x + 3) = 0$$

ou

$$y^4 + (2x^2 - 4x - 1)\,y^2 + x^2\,(x - 3)\,(x - 1) = 0,$$

équation du quatrième degré résoluble à la manière de celles du second, parce que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses (*).

Passons à la recherche du rayon de courbure en coordonnées polaires. A cet effet, reprenons les valeurs données (pag. 311, 312), c'est-à-dire,

$$y = \rho\sin\varphi, \quad x = \rho\cos\varphi$$
$$q = \gamma\sin\omega, \quad p = \gamma\cos\omega,$$

pour les reporter dans les équations de la courbe et du cercle: celle-ci deviendra

$$(\gamma\sin\omega - b)^2 = r^2 - (\gamma\cos\omega - a)^2,$$

mais, pour le point commun, on a $q = y$ et $p = x$, donc $\gamma = \rho$, $\omega = \varphi$, et

---

(*) *Voy.* mes *Réciproques*, et l'ouvrage ayant pour titre: *Trisection de l'angle*, par L.-P.-V. Azemar, suivie de *Recherches analytiques sur le même sujet*, par J.-G. Garnier, ancien professeur à l'École Polytechnique, et instituteur à Paris.

$$(\rho \sin\varphi - b)^2 = r^2 - (\rho\cos\varphi - a)^2 \,;\ldots.(1)$$

différentiant deux fois, en regardant ρ comme fonction de φ, on formera les deux autres équations de condition analogues à $\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(Fx)}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2\,(Fx)}{dx^2}$ (pag. 224), lesquelles seront

$$(\rho\sin\varphi - b)\left(\rho\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{d\rho}{d\varphi}\right) =$$

$$(\rho\cos\varphi - a)\left(\rho\sin\varphi - \cos\varphi\,\frac{d\rho}{d\varphi}\right)\ldots(2)$$

$$\left(\rho\cos\varphi + \sin\varphi\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + (\rho\sin\varphi - b)\left(-\rho\sin\varphi + 2\cos\varphi.\frac{d\rho}{d\varphi} + \sin\varphi\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}\right)$$

$$-\left(\rho\sin\varphi - \cos\varphi\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + (\rho\cos\varphi - a)\left(\rho\cos\varphi + 2\sin\varphi\,\frac{d\rho}{d\varphi} - \cos\varphi\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}\right).(3)$$

Posons, pour abréger,

$$m = \rho\sin\varphi - b$$

$$m' = \rho\cos\varphi - a$$

$$l = \rho\sin\varphi - \cos\varphi\,\frac{d\rho}{d\varphi}$$

$$l' = \rho\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{d\rho}{d\varphi}$$

$$n = -\rho\sin\varphi + 2\cos\varphi\frac{d\rho}{d\varphi} + \sin\varphi\,\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}$$

$$n' = \rho\cos\varphi + 2\sin\varphi\,\frac{d\rho}{d\varphi} - \cos\varphi\,\frac{d^2\rho}{d\varphi^2},$$

et les équations (1), (2), (3) transformées d'après ces abréviations, deviendront

$$m^2 + m'^2 = r^2$$

$$m\,l' = m'\,l$$

$$l'^2 + mn = -l^2 + m'n'.$$

Evaluons m et m' au moyen des deux dernières équations, et nous trouverons

$$m' = \frac{l'(l'^2 - l^2)}{n'l' - nl}, \quad m = \frac{l(l'^2 + l^2)}{n'l' - nl};$$

la substitution de ces valeurs dans la première équation, donnera

$$r = \frac{(l'^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}{n'l' - nl},$$

et en remplaçant l, l', n, n', par les quantités que ces lettres représentent, il vient, après les réductions, cette formule du rayon de courbure, savoir :

$$r = \frac{\left\{\rho\rho + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\rho\rho + 2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 - \rho\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}}.$$

On parvient plus simplement à cette expression du rayon de courbure, en tirant de ces deux relations

$$y = \rho \sin\varphi, \quad x = \rho\cos\varphi,$$

les coefficiens différentiels

$$\frac{dy}{d\varphi} = \rho\cos\varphi + \frac{d\rho}{d\varphi}\sin\varphi = y'$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\rho\sin\varphi + \frac{d\rho}{d\varphi}\cos\varphi = x'$$

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} = -\rho\sin\varphi + 2\frac{d\rho}{d\varphi}\cos\varphi + \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}\sin\varphi = y''.$$

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} = -\rho\cos\varphi - 2\frac{d\rho}{d\varphi}\sin\varphi + \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}\cos\varphi = x'';$$

et les substituant dans cette transformée,

$$r = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'},$$

du rayon de courbure $r = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$, sous l'hypothèse de x et y fonctions d'une troisième variable φ.

Pour la trisectrice représentée par l'équation

$$\rho = 2 \cos \varphi \pm 1,$$

on a $\frac{d\rho}{d\varphi} = -2 \sin \varphi$, $\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = -2 \cos \varphi$, et conséquemment Fig. 34.

$$r = \frac{(5 \pm 4 \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}}{9 \pm 6 \cos \varphi}.$$

Dans l'hypothèse $\varphi = 0$, cette formule donne pour le signe supérieur, $r = \frac{9}{5}$, et pour le signe inférieur, $r = \frac{1}{3}$. Si du point F auquel se rapporte le rayon de courbure $r = \frac{9}{5}$, on prend sur FC une longueur $FO = \frac{9}{5} = 1 + \frac{4}{5}$, on aura......... $CO = 3 - \frac{9}{5} = \frac{6}{5}$. Si $F\mu'$ est un arc du cercle osculateur en F, et qu'on mène le rayon $O\mu$ qui rencontre la trisectrice en μ, on trouve que, pour un angle $\varphi = 60°$ dans l'ancienne division, la divergence $\mu\mu'$ est de moins de 0,03 du rayon CA. (*Voyez* l'ouvrage cité ci-dessus.)

Cherchons maintenant la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur, ou le sous-rayon de courbure que nous nommerons r'. Fig. 35.

C étant le centre du cercle osculateur en M, on a $CM = r$: la projection de r sur le rayon vecteur MF, est la ligne MM' déterminée par la perpendiculaire menée de C sur MF. Nous désignerons MM' par r'. On a

$$r' : r :: \cos M'MC : 1, \quad \text{d'où} \quad r' = r \cos M'MC;$$

or, $\cos M'MC = \sin T'MF$, et dans le triangle $T'MF$ formé par le rayon vecteur MF, la sous-tangente FT', et la portion MT' de la tangente en M, on a

$$\sin T'MF : \cos T'MF :: FT' : MF :: -\rho^2 \frac{d\varphi}{d\rho} : \rho;$$

donc

$$\sin T'MF = \frac{\rho \frac{d\varphi}{d\rho}}{\sqrt{1 + \rho^2 \left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2}} = \frac{\rho}{\sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho\rho}};$$

et conséquemment

$$r' = \frac{\rho\left\{\rho\rho + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right\}}{\rho\rho + 2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 - \rho\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}}.$$

Reprenons l'équation de la spirale logarithmique (pag. 317), savoir :

$$\rho = a^\varphi.$$

Fig. 36. on en déduit cette expression de la normale

$$MN = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} = \rho \sqrt{1 + n^2},$$

où $n = la$; mais $\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = n \frac{d\rho}{d\varphi}$; donc on a pour l'expression du rayon de courbure,

$$r = \frac{\left\{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 - \rho\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}} = \rho \sqrt{1 + n^2},$$

la même que celle de la normale. On a encore dans les deux triangles rectangles FMN, FMT,

$$\sin N = \frac{1}{\sqrt{1 + n^2}}, \sin TMF = \frac{1}{\sqrt{1 + n^2}},$$

Il résulte de là que les deux angles FMT, FNM, sont égaux : qu'ainsi la courbe FHN est telle aussi 1°. que l'angle formé par sa tangente et le rayon vecteur, est constant; 2°. qu'il est le même que celui qui a lieu entre le rayon vecteur de la développante et la tangente : d'où on conclut que la développée est la même courbe que la développante, mais dans une situation contraire.

Jacques Bernoulli est le premier qui ait considéré cette courbe, et qui ait découvert la belle propriété dont nous venons de parler, ainsi que plusieurs autres non moins curieuses. Il aurait desiré, si cet usage avait encore lieu, qu'on gravât une spirale logarithmique sur son tombeau, comme autrefois on grava sur celui d'*Archimède* une sphère inscrite au cylindre.

Cherchons maintenant le coefficient différentiel de l'aire d'une courbe rapportée aux coordonnées polaires ρ et φ : la surface en question est comprise entre le rayon vecteur FM, l'axe fixe FAX, et l'arc de courbe AM. Fig. 37.

Nous avons vu (chap. XVII), que e représentant l'aire APM d'une courbe rapportée à des coordonnées rectangulaires, on avait

$$\frac{d.Fx}{dx} = \frac{de}{dx} = y;$$

mais l'espace FAM que nous considérons, et que nous désignerons par E, est $= \frac{1}{2}xy - e$, l'origine des coordonnées

x, y étant en F. On a donc, en observant que E est une fonction de la variable x qui dépend de φ,

$$\frac{dE}{d\varphi} = \tfrac{1}{2}\left(x\,\frac{dy}{d\varphi} + y\,\frac{dx}{d\varphi}\right) - \frac{de}{dx}\,\frac{dx}{d\varphi},$$

d'où, à cause de $\dfrac{de}{dx} = y$,

$$\frac{dE}{d\varphi} = \tfrac{1}{2}\left(x\,\frac{dy}{d\varphi} - y\,\frac{dx}{d\varphi}\right).$$

Or, de ces relations

$$y = \rho \sin\varphi, \quad x = \rho\cos\varphi,$$

on déduit

$$\frac{dy}{d\varphi} = \quad \rho\cos\varphi + \frac{d\rho}{d\varphi}\sin\varphi$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\rho\sin\varphi + \frac{d\rho}{d\varphi}\cos\varphi:$$

donc

$$x\,\frac{dy}{d\varphi} = \quad \rho^2\cos^2\varphi + \rho\,\frac{d\rho}{d\varphi}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$y\,\frac{dx}{d\varphi} = -\rho\sin^2\varphi + \rho\,\frac{d\rho}{d\varphi}\sin\varphi\cos\varphi,$$

et conséquemment

$$\frac{dE}{d\varphi} = \tfrac{1}{2}\rho\rho,$$

résultat indépendant de φ, c'est-à-dire, de la position de l'axe FX ; il est visible d'ailleurs que la surface varie par ρ. On déduit de l'expression ci-dessus,

$$E = \tfrac{1}{2}\int \rho\rho\, d\varphi + C,$$

intégration qu'on effectuera, après avoir remplacé ρ^2 par sa valeur en φ tirée de l'équation de la courbe.

Pour traduire aussi en coordonnées polaires, la formule pour la rectification (chap. XVII, pag. 263)

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

on aura

$$\frac{ds}{d\varphi}=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}=\sqrt{\rho\rho+\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}.$$

Dans la spirale d'Archimède (pag. 315), dont l'équation est Fig. 31.

$$2\pi\rho=a\varphi,$$

on trouve

$$E=\frac{\pi}{a}\int\rho^2\,d\rho=\frac{\pi}{3a}\rho^3+C,$$

C désignant la constante. Si on veut avoir l'aire correspondante à une révolution du rayon vecteur, c'est-à-dire, l'intégrale de $\varphi=0$ à $\varphi=2\pi$, on déterminera la constante C de manière que l'aire E soit nulle pour $\varphi=0$ ou pour $\rho=0$, condition qui donne $C=0$; puis dans $E=\frac{\pi}{3a}\rho^3$, on fera $\rho=a$, ce qui donnera $E=\frac{\pi a^2}{3}$, tiers du cercle dont le rayon $=a$.

Pour la spirale logarithmique (pag. 317) qui a pour équation Fig. 33.

$$\varphi=l\rho,$$

l indiquant le *logarithme népérien*, on trouve

$$s=\int d\rho\sqrt{2}=\rho\sqrt{2}+C,$$

C étant la constante. Si l'arc commence au pôle, on a, en même tems, $s=0$, $\rho=0$; ainsi, quoique la courbe n'atteigne son pôle qu'après un nombre infini de révolutions, l'arc s est fini et égal à la diagonale du carré construit sur le rayon vecteur ρ qui aboutit à son autre extrémité.

Nous allons exposer la génération, et donner les équa-

tions de quelques autres courbes auxquelles on pourra appliquer toutes les méthodes exposées jusqu'ici.

Fig. 38. Par un point fixe B, menons une ligne BQM qui coupe en C une droite donnée AX; puis prenons $CM = CQ =$ une droite donnée : la suite des points M et Q forme une courbe nommée *conchoïde*, et trouvée par *Nicomède.*

La *conchoïde* résulte donc de l'intersection continuelle de la droite BM, tournant autour de B, par un cercle MEQ d'un rayon constant, qu'on fait glisser le long de AX, de manière que son centre soit toujours à l'intersection de AX et de BM. Prenons AX, BY pour axes rectangulaires : soient $AC = \alpha$, $AB = b$, $CM = CQ = a$; soit A la tangente de l'angle MCX : les équations de la droite BM et du cercle, seront

$$y = Ax - b, \ (x - \alpha)^2 + y^2 = a^2;$$

mais pour $y = 0$, l'équation de la droite donne $0 = A\alpha - b$, à cause de $AC = \alpha$: en effet, la distance du point C au point A augmentant indéfiniment, les longueurs Cp, Cp' déterminées par les perpendiculaires Mp, Qp' diminuent continuellement et indéfiniment jusqu'à zéro, en sorte que les abscisses Ap, Ap' ont pour limite $AC = \alpha$; si donc on élimine α et A entre ces trois équations, on trouvera pour celle de la conchoïde,

$$\left(\frac{xy}{y+b}\right)^2 = a^2 - y^2.$$

Cette courbe est donc formée de deux branches qui s'étendent l'une au-dessus, l'autre au-dessous de l'axe AX qui leur sert d'asymptote : sa plus grande largeur DD' correspond à BM perpendiculaire à AX. Si AB est $< a$, il y aura un nœud $BmD'n$ qui, pour $AB = a$, se changera en un point de rebroussement.

Fig. 39. Soient le cercle AFB donné, et sa tangente BD : si après avoir mené de l'extrémité A du diamètre $AB = 2a$, les

droites AD aux divers points de la tangente, on prend.... Fig. 39.
$AM = FD$, la suite des points M sera la *cissoïde de Dioclès*. On s'est servi autrefois de cette courbe, ainsi que de la *conchoïde*, pour résoudre le problème de la duplication du cube.

La *cissoïde* résulte donc de l'intersection continuelle d'une droite AD mobile autour de A, par un cercle dont le centre est en A, et dont le rayon $AM = R$ est toujours égal à FD.

Les équations de la droite AD et du cercle dont nous venons de parler, sont

$$(1) \ldots\ldots y = Ax, \quad y^2 + x^2 = R^2 \ldots\ldots (2);$$

or, l'équation du cercle AFB étant

$$y^2 = 2ax - x^2,$$

pour l'origine A, on trouve, pour l'abscisse AE de l'intersection de la droite avec ce cercle,

$$AE = \frac{2a}{1 + A^2}, \quad \text{d'où } EB = \frac{2aA^2}{1 + A^2};$$

mais

$$AP = R \cos MAP = \frac{R}{\sqrt{1 + A^2}}:$$

ainsi, $AM = FD$, ou $AP = EB$ donne

$$R\sqrt{1 + A^2} = 2aA^2.$$

Éliminant R et A à l'aide des équations (1) et (2), on trouve

$$x^3 + xy^2 = 2ay^2, \quad \text{d'où } y^2 = \frac{x^3}{2a - x},$$

équation de la *cissoïde*. Ainsi 1°. l'abscisse $x = AP$ ne peut être plus grande que $2a$, ni négative, d'où il résulte que la courbe est renfermée entre les deux parallèles AY et BD; 2°. la courbe est symétrique de part et d'autre de l'axe AX;

3°. elle passe par l'origine A qui est un point de rebroussement; 4°. $x = a$ donne $y = \pm a$, ordonnées des points H et H', dans lesquels la cissoïde coupe la circonférence directrice et partage celle-ci en quatre parties égales; 5°. $x = 2a$ donne $y = \infty$: ainsi la tangente B est une asymptote.

La courbe $OBM..S$, dont les abscisses AP, AP'... croissent par des différences égales, quand les ordonnées correspon-
Fig. 40. dantes PM, $P'M'$.... forment une suite par quotiens égaux, est nommée *logarithmique*. Son équation est

$$x = \log. y, \quad \text{ou } y = a^x,$$

a étant la base. On voit 1°. que la courbe n'a qu'une seule branche qui est infinie de part et d'autre de l'axe AY; 2°. l'ordonnée AB, à l'origine, est $= 1$; 3°. si l'on prend...... $Ap = AB = 1$, on a $pm = a =$ la base; 4°. si a est > 1, la partie BS de la courbe du côté des abscisses positives, s'éloigne sans cesse de l'axe AX, tandis qu'à la gauche de AB, la courbe s'approche de AX', en sorte que l'axe des abscisses lui sert d'asymptote. Le contraire a lieu pour $a < 1$. Les différentes espèces de logarithmiques sont distinguées entre elles par la base a.

La courbe des sinus, qu'on peut appeler *sinusoïde*, a pour équation

$$y = \sin x.$$

Ainsi chaque abscisse est un arc rectifié du cercle du rayon
Fig. 41. r, arc dont le sinus est y. L'arc devenant 0, πr, $2\pi r$..., le sinus est nul. Ainsi, à partir de l'origine A, et de part et d'autre, $AR = RR'... = Ar = Ar'... = \pi r$, les points A, R, R'... r, r'... seront les intersections de la courbe avec l'axe AX. L'arc croissant depuis zéro jusqu'à $\frac{1}{2}\pi r = AP$, le sinus croît jusqu'à $PM = r$; mais x continuant à croître, x diminue. Lorsque x est $> \pi r$, le

sinus devient négatif, et toutes les ondulations sont symétriques.

Passons à la *quadratrice de Dinostrate*, courbe ainsi nommée, parce que ce géomètre de l'école de *Platon*, l'inventa à l'occasion de la quadrature du cercle.

Ayant tracé deux axes AX, AY, à angle droit, si l'on suppose que l'ordonnée PM se meuve parallèlement à l'axe AY, tandis que AM tourne autour de A, de manière que l'espace CP parcouru à partir du point C, sur la ligne CA donnée, soit toujours à l'arc ab, dans le rapport de CA à ac, en sorte que PM et AM se confondent en même tems avec AY, la suite des points M sera la *quadratrice*. Fig. 42.

Soient $AC = a$, $ab = \varphi$, $AP = \alpha$; les équations de AM et PM sont

$$y = x \text{ tang. } \varphi, \quad x = \alpha,$$

mais on a

$$\frac{CP}{CA} = \frac{ab}{ac}, \quad \text{d'où} \quad \frac{a - \alpha}{a} = \frac{\varphi}{\frac{1}{2}\pi},$$

π étant la demi-circonférence, et l'arc φ étant décrit d'un rayon $= 1$. Éliminant α et φ, il vient, pour l'équation de la courbe,

$$y = x \text{ tang. } \left\{ \frac{\frac{1}{2}\pi \ (a - x)}{a} \right\},$$

c'est-à-dire,

$$y = x \cot. \left(\frac{\pi x}{2a} \right) = \frac{x}{\text{tang.} \left(\frac{\pi x}{2a} \right)}.$$

Donc 1°. $x = 0$, donne $y = \frac{0}{0}$ dont on cherchera la valeur vraie, d'après ce qui a été dit (chap. X); 2°. la courbe est symétrique de part et d'autre de l'axe AY; 3°. $\pm x > a$ rendent l'ordonnée y négative; 4°. $\pm x = a$ donnent $y = 0$;..... 5°. $\pm x = 2a$ correspondent aux asymptotes QN, $Q'N'$.

A l'occasion de la cycloïde, les géomètres ont considéré une
Fig. 43. autre courbe qu'ils ont appelée sa compagne, ou la *Trochoïde*, dont la propriété est telle que le cercle *AMBH* parcourant la droite *OS* par un mouvement de translation, et tournant en même tems autour de son centre, on ait la propriété

$$OB : AMB :: NP : \text{arc } AM.$$

Supposant donc $OS = b$, la circonférence $AMBH = c$, l'arc $AM = s$, $NP = y$, on a pour l'équation de la trochoïde

$$y = \frac{bs}{c}.$$

Taylor a démontré le premier qu'une corde vibrante tendue par un poids et détournée un peu de sa position initiale, doit former une trochoïde très-alongée, pour que tous ses points arrivent en même tems à l'axe.

On a distingué trois espèces de trochoïde, ainsi que trois espèces de cycloïde; mais nous n'entrerons pas dans de plus grands détails à cet égard.

CHAPITRE XXI.

Cubature des volumes de révolution ; mesure de leurs surfaces. De l'Aire du Cylindre droit, comprise entre un arc d'une courbe à double courbure, sa projection horisontale et les deux ordonnées verticales extrêmes. Rectification des Courbes à double courbure.

Les courbes planes appartiennent à la géométrie de deux dimensions, et ne dépendent, par conséquent, que de deux coordonnées. Les courbes à double courbure, c'est-à-dire, celles qui ne sont pas contenues dans un plan, ou qui ne peuvent être tracées que sur la surface des corps solides, appartiennent à la géométrie de trois dimensions ; aussi dépendent-elles de trois coordonnées perpendiculaires entre elles, dont deux sont fonctions de la troisième. Ces courbes sont définies par deux projections sur deux des trois plans rectangulaires, parce qu'en effet, si on conçoit deux cylindres, respectivement perpendiculaires aux plans de ces deux projections, et ayant pour bases ces projections elles-mêmes, l'intersection de ces surfaces cylindriques sera la courbe à double courbure.

Les surfaces courbes se déterminent aussi par trois coordonnées rectangulaires, comme les lignes à double courbure ; mais avec cette différence que, pour les surfaces, deux des coordonnées sont indépendantes entre elles, et la troisième est fonction de ces deux ; de sorte qu'une surface est représentée par une seule équation entre ces trois coordonnées ;

ainsi, les deux équations qui expriment une courbe à double courbure, représentent, chacune en particulier, une surface courbe cylindrique, perpendiculaire au plan de la base, et dont on sait que l'équation est celle de la base, et la courbe représentée par le système de ces deux équations, est formée par l'intersection de ces deux surfaces.

La théorie des surfaces dépend donc de l'analyse des fonctions de deux variables, et peut être traitée comme la théorie des courbes et par les mêmes principes.

1°. *Cubature des volumes de révolution.*

On propose de trouver l'expression du volume engendré par la révolution de l'aire APM autour de l'axe des abscisses, volume qui est aussi une fonction de x, puisqu'il croît et décroît avec cette abscisse.

Fig. 44. Si l'on désigne par Fx le volume du solide engendré par l'aire APM, la différence $F(x+i)-Fx$ exprimera celui qui résulte de l'aire $PP'M'M$, ou qui est compris entre les deux cercles parallèles décrits par les ordonnées PM, $P'M'$, et la surface décrite par l'arc MM'; ce dernier volume sera nécessairement intermédiaire entre les deux volumes cylindriques engendrés par les rectangles $PP'mM$, $PP'M'm'$, volumes exprimés par $\pi y^2 i$ et $\pi(y+h)^2 i$, ou par $\pi(fx)^2 i$ et $\pi f(x+i)^2 i$, en prenant la quantité $i=PP'$ aussi petite qu'on voudra; d'où l'on conclura, comme on l'a fait (chap. XVII),

$$\frac{\mathrm{d}(Fx)}{\mathrm{d}x}=\pi(fx)^2=\pi y^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}Fx=\pi y^2\mathrm{d}x,$$

et, en désignant par V le volume engendré par l'aire APM,

$$\mathrm{d}V=\pi y^2\mathrm{d}x \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

On aura donc le volume V en prenant la fonction primitive

de $\pi y^2 dx$, et la complettant par une constante arbitraire. Ainsi

$$V = \int \pi y^2 dx + C,$$

π étant la circonférence du cercle dont le diamètre $= 1$.

2°. *Des Surfaces de révolution.*

Si l'on imagine que la courbe proposée tournant autour de l'axe des abscisses, engendre un conoïde, il est visible que les deux ordonnées fx, $f(x+i)$, décriront en même tems deux cercles dont ces ordonnées seront les rayons, que l'arc de courbe MM' décrira une zône conoïdique, et que les deux tangentes Mt, $M't'$ décriront des zônes coniques entre lesquelles la zône conoïdique sera nécessairement renfermée. Or, on sait, par la géométrie, que la surface convexe d'un cône tronqué, est égale à son côté multiplié par la demi-somme des circonférences de ses deux bases ; donc, si l'on désigne encore par π la circonférence du cercle dont le diamètre $= 1$, et si l'on pose Fig. 44.

$\varphi x = \sqrt{1 + \left(\frac{d.fx}{dx}\right)^2}$, la surface de la zône conique décrite par la tangente $i\varphi x = Mt$, sera $2i\varphi x . \pi \left\{ fx + \frac{i}{2} \frac{d(fx)}{dx} \right\}$, en observant que les rayons PM et $P't$ sont, le premier fx, et le second $fx + mt = fx + i \frac{d(fx)}{dx}$; et la surface de l'autre zône décrite par la tangente $M't' = i\varphi(x+i)$, sera $2i\varphi(x+i)\pi \left\{ f(x+i) - \frac{i}{2} \frac{df(x+i)}{dx} \right\}$, parce que le rayon $P'M'$ est $f(x+i)$, et que le rayon . . . . . . $Pt' = Pm' - t'm' = f(x+i) - i \frac{df(x+i)}{dx}$. Si donc on désigne par Φx la fonction de l'abscisse x qui exprime la surface du conoïde décrite par AM, il est clair que la zône conoïde engendrée par l'arc MM', sera exprimée par la diffé-

rence $\Phi(x+i)-\Phi x$, et que cette différence sera renfermée entre les deux quantités $2i\pi\varphi x\left\{fx+\frac{i}{2}\frac{\mathrm{d}(fx)}{\mathrm{d}x}\right\}$ et...
$2i\pi\varphi(x+i)\left\{f(x+i)-\frac{i}{2}\frac{\mathrm{d}f(x+i)}{\mathrm{d}x}\right\}$, en donnant à i une valeur quelconque aussi petite qu'on voudra; ainsi, en posant l'inégalité qui résulte de la condition qu'on vient d'exprimer, en y introduisant les termes limites (chap. XI), et divisant par i, on conclura de la même manière qu'au chap. XVII, que l'inégalité ne peut avoir lieu, quelque petit que soit i, à moins que

$$\Phi'x=2\pi\varphi xfx.$$

Ainsi, en désignant par S la surface décrite par AM, on aura

$$\mathrm{d}S=2\pi\mathrm{d}xfx\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}(fx)}{\mathrm{d}x}\right)^2}=2\pi y\mathrm{d}x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\ldots(2)$$

on obtiendra la surface du conoïde en prenant la fonction primitive absolue de $2\pi\mathrm{d}xfx\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}(fx)}{\mathrm{d}x}\right)^2}$ ou de.. $2\pi y\mathrm{d}x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$, et la complettant par une constante arbitraire, ce qui donnera

$$S=\int 2\pi y\mathrm{d}x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}+C.$$

On substituera dans cette formule et dans la précédente pour y et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, leurs valeurs en fonctions de x, déduites de l'équation de la courbe qu'on considère, en sorte qu'il restera à intégrer une différentielle de la forme $X\mathrm{d}x$, X désignant une fonction de x, ce qu'on fera d'après les méthodes qui seront exposées dans la seconde partie de ce Traité.

3°. *De l'Aire du cylindre droit, comprise entre un arc d'une courbe à double courbure, sa projection horisontale, et les deux ordonnées verticales extrêmes.*

On peut regarder la courbe de projection sur le plan des xy, d'une courbe à double courbure, comme l'axe curviligne de cette courbe, sur lequel on comptera les abscisses à partir d'un point fixe, et les ordonnées seront les arêtes verticales du cylindre droit ayant cette projection pour contour de sa base. Si donc on suppose que l'arc t qui sert d'abscisse, soit étendu en ligne droite, on aura t et z pour les coordonnées rectangulaires de la courbe à double courbure tracée sur la surface du cylindre, développée sur un plan.

Cette considération offre l'avantage d'appliquer aux courbes à double courbure les formules de la quadrature et de la rectification des courbes planes. Pour le premier cas, il n'y aura qu'à substituer t pour x, et z pour y dans la formule de la quadrature, trouvée (pag. 257), savoir :

$$\frac{\mathrm{d}Fx}{\mathrm{d}x}=y,$$

qui deviendra

$$\mathrm{d}Fx=z\mathrm{d}t,$$

et parce que (pag. 265) l'arc $\mathrm{d}t=\mathrm{d}x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$, on aura

$$\mathrm{d}Fx=z\mathrm{d}x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

or les coordonnées z et y étant données en x par les équations $y=fx$ et $z=\varphi x$ des projections de la courbe à double courcure (pag. 333), ou aura pour $\mathrm{d}Fx$ une différentielle de la forme $X\mathrm{d}x$, X désignant une fonction de x, différentielle qu'on intégrera d'après les méthodes données dans la seconde partie.

4°. Rectification des courbes à double courbure.

La surface du cylindre étant toujours développée sur un plan vertical dont la trace horisontale est l'arc t de la courbe de projection, étendu en ligne droite, si on désigne par s l'arc correspondant de l'espace, et par t et z les coordonnées de son extrémité, on aura (pag. 263)

$$ds = \sqrt{dt^2 + dz^2},$$

et parce que $dt^2 = dx^2 + dy^2$, on aura, en observant que y et z sont fonctions de x, cette équation entre les coefficiens différentiels.

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}} \ldots\ldots (6),$$

formule qui nous servira (pag. 348).

Fig. 45. Nous ferons des applications de quelques-unes des formules que nous venons d'obtenir, et nous nous proposerons d'abord de trouver le volume engendré par l'aire du triangle MAM' tournant autour de l'axe AX.

La droite AM passant par l'origine, a pour équation

$$y = ax,$$

on a donc (pag. 334)

$$V = \pi \int y^2 dx = \frac{\pi}{3} a^2 x^3 + C,$$

et si le volume V engendré par l'aire APM, commence avec l'abscisse, on a, en même tems, $x = 0$ et $V = 0$, donc $C = 0$: si ce volume doit s'étendre jusqu'au cercle décrit par PM, alors

$$V = \frac{\pi}{3} y^2 . x = \frac{\pi}{3} \overline{PM}^2 \times AP.$$

Cette formule appliquée au volume décrit par la révolution

autour de AX, de l'aire du triangle RPM, après l'avoir fait glisser de manière que le point R tombe en A, et que sa base RP soit toujours sur l'axe AX, donne

$$V' = \frac{\pi}{3}\overline{PM}^2 \times RP;$$

donc le volume total engendré par AMR, sera

$$\frac{\pi}{3}\overline{PM}^2(AP + PR) = \frac{\pi}{3}\overline{PM}^2.AR,$$

expression donnée par M. *Legendre*, dans sa Géométrie. Si de ce volume on retranche celui qui est engendré de la même manière par l'aire du triangle $AM'R$, et qui a pour expression

$$\frac{\pi}{3}\overline{P'M'}^2.AR,$$

on a pour différence qui est le volume cherché,

$$\frac{\pi}{3}\left\{\overline{PM}^2 - \overline{P'M'}^2\right\}AR.$$

Il est facile de trouver les volumes engendrés par les courbes du second degré tournant autour de l'axe principal, puisqu'après avoir remplacé dans $\pi\int y^2 dx$, y^2 par la fonction en x qu'elle représente, on n'a plus à intégrer que des différentielles monomes.

L'équation de l'ellipse, rapportée à l'un des sommets comme origine des coordonnées, est

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

et conséquemment

$$\pi\int y^2 dx = \pi\frac{b^2}{a^2}\int(2ax\,dx - x^2 dx) = \pi\frac{b^2}{a^2}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right) + C,$$

où la constante est nulle, quand le volume commence avec l'abscisse. Pour $x = 2a$, on a le volume engendré par la révolution de l'aire de la demi-ellipse autour de son axe; et ce

volume que nous désignerons par V, est

$$V=\frac{4\pi}{3}b^2a;$$

mais si l'on suppose $b=a$, l'ellipse devient un cercle du même grand axe; et en notant par V' le volume engendré par la révolution de la demi-circonférence autour du diamètre, on a

$$V'=\frac{4\pi}{3}a^3;$$

donc

$$V:V'::b^2:a^2;$$

d'où l'on conclut que ces volumes sont dans le rapport des carrés des deux axes.

Si l'on applique la formule

$$V=\pi\int y^2 dx+C$$

à la cubature des volumes dus à la révolution autour de l'axe des abscisses, des courbes représentées par les équations

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(ax-x\ ),\quad y^2=\frac{b^2}{a}x,\quad y^2=\frac{b^2}{a^2}(ax+xx),$$

on trouvera, a désignant le grand axe de l'ellipse et de l'hyperbole,

$$V=\frac{b^2}{a^2}\pi\left(a\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)+C,\quad V'=\frac{b^2}{a}\times\frac{\pi x^2}{2}+C',$$

$$V''=\frac{b^2}{a^2}\pi\left(\frac{ax^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)+C''.$$

Comme les intégrales ou les volumes deviennent nuls en même tems que x, on aura

$$C=0,\quad C'=0,\quad C''=0,$$

Si d'ailleurs les volumes doivent être pris depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, on aura

$$V = \frac{\pi}{6}ab^2, \quad V' = \frac{3\pi}{6}ab^2, \quad V'' = \frac{5\pi}{6}ab^2,$$

d'où résulte cette propriété

$$V : V' : V'' :: 1 : 3 : 5.$$

Ainsi les volumes de l'ellipsoïde, du paraboloïde et de l'hyperboloïde, dus aux courbes données, forment une proportion arithmétique continue.

Appliquons la formule (pag. 336)

$$S = \pi\int y\mathrm{d}x\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2},$$

à la recherche de l'expression de la surface engendrée par la révolution de la demi-circonférence tournant autour de son diamètre; l'origine des coordonnées étant au centre, on a

$$y^2 = a^2 - xx,$$

et conséquemment

$$S = \pi\int y\,\mathrm{d}x \times \frac{a}{y} = a\pi\int\mathrm{d}x = a\pi x + C;$$

or, si la surface doit commencer avec l'abscisse, on a, en même tems, $S = 0$, $C = 0$; donc

$$S = a\pi x.$$

Soit $x = a$, et on trouvera πa^2 pour la demi-surface de la sphère, et conséquemment $2\pi a^2$ pour la surface entière de la sphère. Si π est la circonférence dont le diamètre est 1, il faudra doubler cette expression, et on aura $4\pi a^2$ pour la surface totale de la sphère.

CHAPITRE XXII.

Théorie des Contacts, et développées des Courbes à double courbure.

IL résulte des notions données dans le chapitre précédent sur les courbes à double courbure, que la tangente en un point quelconque d'une courbe à double courbure, est l'intersection des deux plans qui touchent les deux surfaces cylindriques, ayant pour bases les deux projections de la courbe à double courbure, suivant les arêtes qui correspondent au point qu'on considère sur la courbe à double courbure; or les deux projections de cette tangente, sont les tangentes aux deux projections de la double courbure, aux points qui sont les projections de celui qu'on considère dans l'espace; il suffit donc, d'après cela, d'écrire les équations des deux projections de la tangente.

Soient donc, pour une courbe à double courbure,

$$y = fx, \quad z = \varphi x,$$

les équations de ses projections sur les plans des xy et des xz, et

$$q = ap + b, \quad s = cp + g,$$

les équations des projections d'une droite de l'espace sur les mêmes plans : pour que cette droite soit tangente à la courbe proposée, il faut d'abord que la droite et la courbe aient un point commun, ou qu'on ait $p = x$, $q = y$, $s = z$; ainsi,

les équations de la droite deviennent

$$y = ax + b, \quad z = cx + g;$$

il faut, de plus, qu'on ait (pag. 226 et 227)

$$a = \frac{dy}{dx}, \quad c = \frac{dz}{dx};$$

les deux équations précédentes donnent, après la substitution de ces valeurs,

$$b = y - \frac{dy}{dx}x, \quad g = z - \frac{dz}{dx}x,$$

de sorte que les équations de la tangente à la courbe à double courbure, au point x, y, z, seront

$$q - y = \frac{dy}{dx}(p - x), \quad s - z = \frac{dz}{dx}(p - x),$$

p, q, s étant les coordonnées générales de la tangente Chacune de ces équations est celle d'une projection de la tangente au point x, y et z.

La position du plan normal, c'est-à-dire, d'un plan mené par le point de contact, perpendiculairement à la tangente, est facile à trouver, puisqu'il suffit de dire qu'un plan passe par le point x, y, z, et que ses traces sur les plans des xy et des xz sont respectivement perpendiculaires aux projections de la tangente sur les mêmes plans; on trouve ainsi

$$(s - z)\frac{dz}{dx} + (q - y)\frac{dy}{dx} + p - x = 0,$$

pour l'équation du plan normal, s, q et p étant ses coordonnées générales.

Passons à la recherche du cercle osculateur d'une courbe à double courbure.

Pour avoir de la manière la plus simple l'équation générale d'un cercle situé dans un plan quelconque, nous considérerons le cercle comme formé par l'intersection d'un plan qui passe par le centre d'une sphère; le rayon et le centre de cette sphère deviendront alors ceux du cercle, et le plan sera le plan même du cercle.

L'équation générale d'une sphère rapportée aux trois coordonnées p, q, s, est

$$(p-a)^2+(q-b)^2+(s-c)^2=r^2,$$

où a, b, c sont les coordonnées du centre et r le rayon. L'équation d'un plan rapporté aux mêmes coordonnées, et passant par le point a, b, c, est, en général,

$$(p-a)+m(q-b)+n(s-c)=0,$$

m et n étant deux constantes arbitraires qui déterminent l'inclinaison du plan à l'égard des plans fixes coordonnés. Le système de ces deux équations représentera donc un cercle dont le rayon sera r, dont le centre sera donné par a, b, c, et dont le plan dépendra des quantités m et n.

Si donc on change, dans ces deux équations, p, q, s en x, y, z, coordonnées d'un point particulier de la courbe à double courbure, on exprimera que le cercle et cette courbe ont un point commun; on aura donc d'abord ces deux équations

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \quad \ldots \quad (1)$$

$$x-a+m(y-b)+n(z-c)=0 \quad \ldots \quad (2)$$

Si on les différentie deux fois, en observant que, d'après ces équations $y=fx$, $z=\varphi x$, les coordonnées y et z sont des fonctions de x, on aura les quatre suivantes :

$$x-a+y'(y-b)+z'(z-c)=0 \ldots (3)$$

$$1+my'+nz'=0 \ldots (4)$$

$$1+y'^2+z'^2+y''(y-b)+z''(z-c)=0 \ldots (5)$$

$$my''+nz''=0 \ldots (6)$$

dans lesquelles y', z', y'', z'' rappellent les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$.

Les quatre premières de ces équations renferment les conditions nécessaires pour que le cercle ait un contact du premier ordre avec toute courbe à double courbure; et si l'on y joint les deux dernières, on aura l'ensemble des conditions nécessaires pour un contact du second ordre, c'est-à-dire, pour que le cercle devienne osculateur à la courbe.

Comme il y a dans ces équations, six indéterminées a, b, c, r, m, n, on pourra satisfaire à toutes ces conditions, et le cercle osculateur sera déterminé de grandeur et de position; mais si on ne demande qu'un cercle tangent, il restera deux indéterminées pour lesquelles on pourra prendre le rayon de courbure r et une des deux quantités m et n qui fixent la position du plan du cercle tangent.

Considérons maintenant le contact du second ordre; les équations (1), (2) et (3) donneront

$$x-a=\frac{(ny'-mz')r}{R}, \quad y-b=-\frac{(n-z')r}{R},$$

$$z-c=\frac{(m-y')r}{R};$$

en faisant, pour abréger,

$$R=\sqrt{\{(ny'-mz')^2+(n-z')^2+(m-y')^2\}};$$

ces valeurs étant substituées dans (5), on en tirera

$$r=\frac{(1+y'^2+z'^2)R}{(n-z')y''-(m-y')z''};$$

enfin, les équations (4) et (6) donneront

$$m=\frac{z''}{z'y''-y'z''},\quad n=-\frac{y''}{z'y''-y'z''},$$

valeurs qu'on substituera dans les expressions précédentes. On aura, après les réductions,

$$r=\frac{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\{(1+y'^2+z'^2)(y''^2+z''^2)-(y'y''+z'z'')^2\}}},$$

$$a=x-\frac{(1+y'^2+z'^2)(y'y''+z'z'')}{\{(1+y'^2+z'^2)(y''^2+z''^2)-(y'y''+z'z'')^2},$$

$$b=y+\frac{(1+y'^2+z'^2)y''-y'(1+y'^2+z'^2)(y'y''+z'z'')}{(1+y'^2+z'^2)(y''^2+z''^2)-(y'y''+z'z'')^2},$$

$$c=z+\frac{(1+y'^2+z'^2)z''-z'(1+y'^2+z'^2)(y'y''+z'z'')}{(1+y'^2+z'^2)(y''^2+z''^2)-(y'y''+z'z'')^2},$$

La quantité r sera le rayon osculateur de la courbe proposée, et a, b, c seront les coordonnées de la courbe des centres des cercles osculateurs; mais cette courbe ne sera pas pour cela une développée, comme dans les courbes à simple courbure, ou situées dans un plan.

Pour s'en assurer et trouver en même tems les conditions nécessaires pour que cette courbe des centres devienne une développée, nous emploierons une analyse semblable à celle dont nous avons fait usage (pag. 235). Nous différentierons les équations (1), (2), (3), par rapport aux six quantités a,

b, c, r, m, n; et en observant qu'elles sont toutes fonctions de x, ce qui donnera

$$(x-a)(1-a')+(y-b)(y'-b')+(z-c)(z'-c')=rr'\ldots(7)$$

$$1-a'+m'(y-b)+m(y'-b')+n'(z-c)+n(z'-c')=0\ldots(8)$$

$$1-a'+y''(y-b)+y'(y'-b')+z''(z-c)+z'(z'-c')=0\ldots(9)$$

Or, d'après l'équation (3), l'équation (7) se réduit à

$$-a'(x-a)-b'(y-b)-c'(z-c)=rr'\ldots(10)$$

qui n'est que la différentielle de (1) prise en faisant varier les quantités a, b, c et r. De même l'équation (4) réduit (8) à

$$-a'-mb'-nc'+m'(y-b)+n'(z-c)=0\ldots(11)$$

et l'équation (5) réduit (9) à

$$a'+y'b'+z'c'=0\ldots(12)$$

Or, si l'on suppose

$$m'(y-b)+n'(z-c)=0,$$

condition qui est évidemment satisfaite lorsque m et n sont des quantités constantes, auquel cas la courbe cesse d'être à double courbure, puisqu'elle est toute entière dans un plan déterminé par ces constantes, on aura en place de l'équation (11), celle-ci

$$a'+mb'+nc'=0\ldots(13)$$

Des équations (10), (12) et (13), on déduit

$$a'=-\frac{(ny'-mz')r'}{R},\quad b'=\frac{(n-z')r'}{R},$$

$$c'=-\frac{(m-y')r'}{R},$$

R indiquant toujours

$$\sqrt{\{(ny' - mz')^2 + (n - z')^2 + (m - y')^2\}}.$$

ces valeurs de a', b', c' donnent

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = r'^2, \quad \text{d'où} \quad r' = \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{dr}{da} = \sqrt{1 + \left(\frac{db}{da}\right)^2 + \left(\frac{dc}{da}\right)^2}.$$

en prenant a pour variable indépendante : comme on l'a fait (pag. 236) : on déduit de là

$$r = \int da \sqrt{1 + \left(\frac{db}{da}\right)^2 + \left(\frac{dc}{da}\right)^2} + C \ldots (14)$$

Or (pag. 338), cette équation montre que r est l'arc de la courbe dont a, b, c sont les coordonnées ; donc le rayon osculateur sera égal à l'arc de cette courbe, augmenté d'une quantité constante. Mais on observera que la propriété (14) ne se rapporte plus aux courbes à double courbure, mais aux courbes planes dans l'espace.

Mais pour ne rien laisser à desirer sur cette matière, nous allons traiter la théorie des développées par la géométrie.

Au reste, ce que l'on a fait jusqu'à présent sur les développées des courbes en général, se réduit à assigner les développées des courbes planes; encore parmi le nombre infini de développées d'une courbe plane, n'a-t-on considéré jusqu'ici que celle qui se trouve dans le plan de la développante.

Nous croyons donc qu'on lira avec intérêt les considérations suivantes empruntées de l'ouvrage de M. Monge, ayant pour

titre : *Théorie des surfaces courbes et des courbes à double courbure.*

Lemme. Si l'on conçoit par le centre d'un cercle et perpendiculairement à son plan, une droite infiniment prolongée au-dessus et au-dessous de ce plan, et que d'un point quelconque de cette droite on imagine une ligne à un point de la circonférence, cette ligne en tournant autour de la perpendiculaire comme axe, sous un angle constant avec cet axe, décrira, par son extrémité, la circonférence du cercle. Le point pris arbitrairement sur l'axe, est un *pôle* du cercle. Si donc on prend sur cet axe deux pôles à distances égales du plan du cercle, l'un au-dessus, l'autre au-dessous, qu'on mène par ces deux points deux droites qui se couperaient en un même point de la circonférence, et qu'on fasse tourner le système de ces deux droites autour de l'axe, l'angle de chacune d'elles avec l'axe, restant constant, le point d'intersection décrira la circonférence du cercle.

Soit $KAaD$ une courbe quelconque à double courbure tracée dans l'espace; par un point A de cette courbe, soit mené un plan $MNOP$ perpendiculaire à la tangente en A; par le point a contigu, ou infiniment voisin, soit pareillement mené un plan $mnOP$ perpendiculaire à la tangente en a: ces deux plans se couperont quelque part en une droite OP qui sera l'axe du cercle dont le petit arc Aa de la courbe peut être regardé comme faisant partie; de manière que si des points A et a on abaisse des perpendiculaires AG, aG sur cette droite, ces perpendiculaires la rencontreront en un même point G qui sera le centre de ce cercle. Tous les autres points g, g', g'', etc. de la ligne OP, seront chacun à égales distances de tous les points de l'arc infiniment petit Aa, et pourront, par conséquent, en être regardés comme les pôles. Ainsi, si d'un point quelconque g de cet axe, on mène deux droites Fig. 46.

aux points A, a, les droites gA, ga seront égales entre elles, et elles formeront avec l'axe, des angles AgO, agO égaux entre eux; en sorte que si on voulait définir la courbure de la courbe au point A, il faudrait donner la longueur du rayon AG du cercle osculateur; 2°. si l'on voulait assigner le sens de la courbure, il faudrait donner la position du centre G dans l'espace, duquel on décrit l'arc Aa dans son plan; mais s'il s'agissait simplement de décrire ce petit arc, il serait suffisant ou de faire tourner la droite Ag autour de l'axe, sans altérer l'angle AgO, ou de faire tourner le rayon AG perpendiculairement à cet axe.

La droite OP peut donc être regardée comme la ligne des pôles de l'élément Aa; le centre G de courbure de cet élément, est celui de ses pôles dont la distance à l'élément est un *minimum*; enfin, le rayon de courbure est la perpendiculaire AG abaissée de l'élément sur la ligne des pôles.

Fig. 47. Que l'on fasse actuellement sur tous les points de la courbe à double courbure, l'opération que nous venons de faire sur un de ses élémens, c'est-à-dire, que par tous ses points consécutifs, on fasse passer des plans $MNOP$, chacun perpendiculaire à la tangente à la courbe au point dans lequel elle est coupée par le plan, le premier de ces plans rencontrera le second dans une droite OP qui sera le lieu des pôles de l'arc AA'; le second plan rencontrera le troisième dans la droite $O'P'$ lieu des pôles de l'arc $A'A''$; le troisième rencontrera le quatrième dans la droite $O''P''$, lieu des pôles de l'arc $A''A'''$, et ainsi de suite. Il est évident que le système de toutes ces droites d'intersection infiniment rapprochées, ou la surface courbe formée de leur réunion, sera le lieu géométrique des pôles de la courbe $KAA'A''\ldots D$.

Quoique la nature de cette surface courbe dépende absolument de celle de la courbe $KAA'A''\ldots D$, cependant toutes les

surfaces engendrées de cette manière, ont un caractère général qui consiste en ce qu'elles peuvent être développées sur un plan comme les surfaces coniques et cylindriques à bases quelconques, *sans duplicature et sans solution de continuité.* En effet, les élémens $OPP'O'$, $O'P'P''O''$, etc. dont est composée la surface, sont des portions de plans indéfinies, infiniment étroites, et qui se coupent consécutivement suivant des lignes droites. Cela posé, on peut toujours concevoir que le premier élément $OPP'O'$ tourne autour de la droite $O'P'$ comme charnière, jusqu'à ce qu'il parvienne dans le plan de l'élément suivant $O'P'P''O''$; qu'ensuite leur système ne faisant qu'un même plan, tourne autour de $O''P''$ jusqu'à ce qu'il soit dans le plan du troisième élément $O''P''P'''O'''$, et ainsi de suite. Ainsi, tous les élémens de la surface pourront se ranger, sans rupture, dans le même plan : donc *la surface des pôles d'une courbe quelconque à double courbure, est toujours une surface développable.*

Théor. *Une courbe quelconque plane ou à double courbure, comporte une infinité de développées dont le lieu géométrique est aussi la surface des pôles de cette courbe, seule surface qui contienne les developpées de la proposée.*

Démonstration. Du point A de la courbe, par lequel passe le premier plan normal, soit menée dans ce plan, suivant une direction arbitraire, une droite Ag prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre la section OP quelque part, en un point g; par les points A' et g soit menée dans le second plan normal, la droite $A'g$ prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre la section $O'P'$ en un point g'; soit pareillement menée dans le troisième plan normal la droite $A''g'g''$ jusqu'à l'intersection $O''P''$ et ainsi de suite. Je dis que la courbe qui passe par tous les points $gg'g''$, etc., est une des développées de la courbe KAD. En effet, 1°. toutes les droites Ag, $A'g'$, $A''g''$, etc., sont les

tangentes de la courbe $gg'g''$..., puisqu'elles sont les prolongemens des élémens de cette courbe; 2°. si l'on conçoit que la première tangente Ag tourne autour du point g pour venir s'appliquer sur la suivante $A'g$, elle n'aura pas cessé d'être tangente à la courbe $gg'g''$... etc., et son extrémité A, après avoir décrit l'arc AA', se confondra avec l'extrémité A' de la seconde tangente $A'g'$. Que l'on fasse de même tourner la seconde ligne $A'g'$ autour du point g', pour qu'elle vienne s'appliquer sur la troisième $A''g'$, elle ne cessera pas de toucher la courbe $gg'g''$..., et son extrémité A' ne sortira pas de l'arc $A'A''$, et ainsi de suite; donc la courbe $gg'g''$... est telle que si l'on conçoit qu'une de ses tangentes tourne autour de cette courbe sans jamais cesser de lui être tangente, et sans avoir de mouvement dans le sens de sa longueur, un des points de cette tangente, décrira la courbe KAA'...D dont elle est une des développées. Mais la direction de la première droite Ag était arbitraire, et quelle qu'eût été cette direction dans le plan normal, on aurait trouvé une autre courbe $gg'g''$... qui aurait été pareillement une des développées de KAA'...D; donc, etc.

Remarquons que tous les plans $MNOP$ étant tangens à la surface développable, puisque chacun d'eux est le prolongement d'un de ses élémens $POO'P'$, $P'O'O''P''$, etc., la droite Ag qui, dans tous les instans de son mouvement, se trouve dans un de ces plans, est aussi nécessairement tangent à cette surface.

Théor. *Si du point* A, *l'on abaisse sur* OP *la perpendiculaire* AG; *du point* A′ *sur* O′P′ *la perpendiculaire* A′G′; *du point* A″ *sur* O″P″ *la perpendiculaire* A″G″, *et ainsi de suite, il s'agit de démontrer que la courbe* GG′G″... *qui contient les centres de courbure de* KA...D, *ne peut être une des développées de la proposée, à moins que cette proposée ne soit plane.*

Démonstration. Lorsqu'une courbe est à double courbure, deux tangentes consécutives, c'est-à-dire, deux tangentes aux extrémités d'un même élément, quelque part qu'on le prenne, sont toujours dans le même plan ; mais trois tangentes prises de suite, ne peuvent plus s'y trouver, parce que deux élémens consécutifs d'une telle courbe, ne peuvent pas être dans un même plan ; donc trois plans consécutifs, chacun normal à la courbe, ne peuvent pas être perpendiculaires à un même plan, et conséquemment, l'intersection du premier et du second plan ne peut être parallèle à l'intersection du second et du troisième plan ; donc, pour une courbe à double courbure, les droites OP, $O'P'$, $O''P''$, etc., ne peuvent être parallèles. Cela posé, la droite AG étant perpendiculaire à OP, la droite $A'G$ lui sera aussi perpendiculaire, puisque G est le centre du petit arc élémentaire AA'; mais cette droite $A'G$, prolongée jusqu'en k, ne sera pas perpendiculaire à $O'P'$; elle sera, par conséquent, distincte de la droite $A'G'$, abaissée perpendiculairement du point A' sur $O'P'$; donc les deux droites ou les deux normales consécutives AG et $A'G'$ ne rencontreront pas la droite OP dans le même point ; mais deux droites considérées dans des plans différens, ne peuvent se rencontrer que sur l'intersection de ces deux plans ; donc, les droites AG, $A'G'$ ne se rencontrent pas, et conséquemment elles ne sont pas dans un même plan. Il en est de même de la suite des droites $A'G'$, $A''G''$, $A'''G'''$, etc., prises deux à deux consécutivement ; donc, toutes ces droites ne peuvent pas être les tangentes consécutives d'une même courbe, puisqu'il faudrait, pour cela, que les deux droites AG, $A'G'$, fussent dans le même plan. Il suit de là aussi que si l'on conçoit une droite qui soit tangente à la courbe $GG'G''$... en G', ou à l'élément GG', cette droite ne passera pas par le point A' ; or, en tant qu'elle est sur le second plan normal, elle ne pourrait couper la courbe $KA...D$ que dans le point A' où ce plan la coupe lui-

même; donc la courbe $GG'G''\ldots$ est telle qu'aucune de ses tangentes prolongées ne rencontre la courbe $KAA'A''\ldots D$; donc la suite des points $GG'G''\ldots$ ne peut être une de ses développées; donc, etc.

Si la courbe $KA\ldots D$ était plane, toutes les droites OP, $O'P'$, $O''P''$, etc., seraient perpendiculaires au plan de la courbe, et conséquemment parallèles entre elles. Ces droites ou normales AG, $A'G'$, $A''G''$, etc., seraient toutes dans le plan de la courbe, et se rencontreraient consécutivement dans la courbe $GG'G''\ldots$; donc elles en seraient les tangentes. Cette courbe ne serait autre chose que celle qu'on a considérée comme la développée de la courbe $KA\ldots D$.

Théor. *On aura une des développées d'une courbe quelconque, plane ou à double courbure, si par un de ses points et suivant une direction quelconque, on mène une tangente à la surface développable qui est le lieu de ses pôles, et si l'on plie librement sur cette surface le prolongement de cette tangente, c'est-à-dire que la courbe* gg'g''... *est celle que formerait sur la surface* OPP'''O''' *une droite pliée librement sur cette surface, et dirigée au premier instant suivant* Ag.

Pour le démontrer, observons ce qui arrive à une droite ou à un fil que l'on plie librement sur une surface : ce fil peut être considéré comme ayant infiniment peu de largeur, ou comme n'en ayant pas. Soit $OPP''O''$ deux élémens plans consécutifs d'une surface courbe, ayant pour intersection la droite $O'P'$; soit ABG un ruban infiniment étroit appliqué sur un de ces élémens, suivant une direction quelconque : il est clair que la partie BG ne peut venir s'appliquer sur l'élément suivant, sans faire une partie de révolution autour de Bb ou de $O'P'$; et comme ce mouvement doit se faire librement, ce qui exige que le ruban touche la surface dans tous ses points, l'angle $P'BG$ doit rester constant; le ruban prendra

donc une position BC, telle que l'angle $P'BC$ sera égal à l'angle $O'BA$. Car en supposant le ruban BG appliqué en BC sur l'élément $O'P'P''O''$, si l'on ramène ce second élément dans le plan du premier, le ruban BC se placera dans le prolongement de AB. Il en est de même d'un fil. Or la ligne $gg'g''$... jouit de cette propriété; car g' étant un pôle de l'arc $A'A'$, on a angle $A'g'O'$ = angle $A''g'O'$ = angle $P'g'g''$; et comme ce que nous venons de dire par rapport à l'arête $O'P'$ doit aussi se dire par rapport à toute autre arête de la surface, on conclura que la courbe $gg'g''$... est celle que formerait sur la surface $OPP'''O'''$, une droite pliée librement, avec une direction Ag au premier instant. Donc, si l'on a construit la surface développable qui est le lieu géométrique des développées d'une courbe quelconque à double courbure, on a mécaniquement une de ses développées, en menant par un point de la courbe un fil dans une direction quelconque tangente à cette surface, et pliant ensuite librement le fil sur la surface.

Une courbe plane a donc une infinité de développées qui se trouvent toutes sur la surface du cylindre qui a pour base celle de ses développées qui est dans le plan de la courbe, et toutes ces développées sont à double courbure, à l'exception seulement de celle dont on s'est occupé jusqu'à présent, et qui sert de base à la surface cylindrique.

M. *Monge* démontre réciproquement qu'une surface cylindrique à base quelconque, est le lieu des développées d'une infinité de courbes dont aucune ne peut être à double courbure.

Toute courbe tracée sur la surface d'une sphère, a pour lieu de ses développées la surface d'un cône dont le sommet est au centre de la sphère, et dont la base dépend de la nature de la courbe; car tous les plans perpendiculaires aux élémens de la courbe, le sont aussi à la surface sphérique, et passent, par conséquent, par le centre.

Donc une courbe qui n'est pas plane et qui n'est pas tracée sur la surface d'une sphère, a pour lieu de ses développées une surface développable dont deux arêtes rectilignes consécutives se rencontrent bien quelque part, mais dont trois prises de suite, ne se rencontrent pas dans un même point. La suite de ces points d'intersection forme une courbe qu'on appelle *arête de rebroussement de la surface développable.* Toutes les arêtes de la surface développable, ne sont autre chose que les tangentes de cette arête de rebroussement.

Maintenant, étant données les équations d'une courbe à double courbure, il est facile de trouver celle de la surface développable qui est le lieu géométrique de ses développées.

En effet, si l'on désigne toujours par

$$y = fx \quad \text{et} \quad z = \varphi x,$$

les équations des projections de la courbe à double courbure sur les plans des xy et des xz, nous avons vu (343) que celle du plan normal était

$$(s-z)\frac{dz}{dx} + (q-y)\frac{dy}{dx} + p - x = 0 \ldots (A)$$

où x, y et z sont des quantités constantes pour un même plan normal, et variables en passant d'un plan normal à un autre consécutif : si donc on différentie cette équation en ne faisant varier que x, parce que y et z sont fonctions de cette variable, on aura pour le plan consécutif au précédent dont la position est quelconque

$$(s-z)\frac{d^2z}{dx^2} + (q-y)\frac{d^2y}{dx^2} - \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\} = 0 \ldots (B)$$

Pour obtenir entre p, q, s, une relation qui convienne à la totalité des intersections des plans normaux consécutifs, il faut

éliminer x au moyen des deux équations précédentes, et l'équation qui en résultera, sera celle de la surface demandée, puisqu'elle ne contiendra plus que les coordonnées des points communs à la série des plans normaux.

En second lieu, étant données les équations d'une courbe à double courbure, on peut trouver celles de l'arête de rebroussement de la surface développable qui est le lieu géométrique de ses développées.

Considérons un troisième plan normal consécutif aux deux précédens; son équation se déduira de celle du second, ou de (B), de la même manière que celle-ci a été tirée de (A); elle sera donc

$$(s-z)\frac{d^3z}{dx^3}+(q-y)\frac{d^3y}{dx^3}-3\left\{\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\right\}=0\ldots(C)$$

Ces trois équations donneront le point d'intersection de deux élémens consécutifs de la surface développable; donc si l'on veut avoir la suite de ces points d'intersection, c'est-à-dire, l'arête de rebroussement, on n'aura qu'à éliminer x des trois équations (A), (B) et (C), et les deux équations en p, q et s qu'on obtiendra, seront celles de l'arête de rebroussement, et on en conclurait les équations de deux projections de cette arête.

Si l'on reprend les équations (A) et (B) qui représentent l'intersection d'un plan normal avec celui qui le suit immédiatement, et qu'on déduise de ces équations celles des projections de l'élément de la surface développable sur les trois plans rectangulaires, en éliminant successivement p, q et s entre (A) et (B), on aura ces trois équations

$$q\frac{d^2y}{dx^2}+s\frac{d^2z}{dx^2}-\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+z\frac{d^2z}{dx^2}+y\frac{d^2y}{dx^2}\right\}=0,$$

$$-p\frac{d^2z}{dx^2}+q\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)-\frac{dz}{dx}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}$$
$$+x\frac{d^2z}{dx^2}-y\left(\frac{dz}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)=0,$$

$$-s\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)-p\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}$$
$$+x\frac{d^2y}{dx^2}-z\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)=0;$$

en sorte que la portion d'une perpendiculaire à cet élément, comprise entre le point x, y, z de la courbe à double courbure et sa rencontre avec l'élément, sera le rayon de courbure au point x, y, z de la courbe à double courbure. Or, si l'on cherche cette plus courte distance, on trouvera

$$r=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left\{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2\right\}}},$$

expression du rayon de courbure déja obtenue (pag. 346).

Nous terminerons ce chapitre en donnant, d'après M. *Monge*, les formules qui font trouver *les points de simple et de double inflexion* des courbes à double courbure.

On appelle *point d'inflexion* dans les courbes planes, le point où cette courbe, après avoir été concave dans un sens, cesse de l'être pour devenir concave dans l'autre sens (chap. XIX); il est évident que, dans ce point, la courbe perd sa courbure, et que les deux élémens consécutifs sont en ligne droite. Mais une courbe à double courbure peut perdre chacune de ses courbures en particulier, ou les perdre toutes deux dans le même point; d'où il suit que les courbes à double courbure peuvent avoir deux espèces d'inflexion; la première, que nous

appellerons *simple inflexion*, a lieu lorsque la courbe devient plane en l'un de ses points; et la seconde, que nous nommerons *double inflexion*, a lieu lorsque la courbe devient droite dans un de ses points.

Puisque dans le point de simple inflexion, la courbe à double courbure devient plane, il faut que, dans ce point, les équations de la courbe satisfassent à l'équation générale du plan, qui est

$$z = ax + by + c:$$

si donc on différentie trois fois cette équation, à raison des trois constantes qu'elle renferme, on aura

$$\begin{aligned} dz &= a dx + b dy, \\ d^2z &= b d^2y, \\ d^3z &= b d^3y, \end{aligned}$$

en observant que x est la variable principale. Si on élimine b des deux dernières équations, on trouvera

$$d^2y\, d^3z - d^2z\, d^3y = 0,$$

équation de condition à laquelle doivent satisfaire les équations des projections de la courbe à double courbure, pour que cette courbe ait un point de simple inflexion.

Au point de double inflexion, le rayon de courbure est nul ou infini, ce qui donne

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2.$$

Le premier membre étant la somme de trois carrés, on doit avoir

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ ou } \infty, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 0 \text{ ou } \infty.$$

La troisième équation étant une suite des deux premières, les formules pour trouver les points de double intersection, seront donc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ ou } \infty, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 0 \text{ ou } \infty,$$

ou simplement

$$d^2y = 0 \text{ ou } \infty, \quad d^2z = 0 \text{ ou } \infty.$$

Les mêmes formules donnent aussi les points de rebroussement.

CHAPITRE XXIII.

Des Surfaces courbes.

PASSONS aux surfaces courbes, et désignons toujours par x, y, z, les trois coordonnées d'un point donné sur cette surface, et par p, q, s, les coordonnées analogues d'un plan rapporté aux mêmes axes rectangulaires.

On aura, par la nature de la surface (pag. 333),

$$z = f(x, y),$$

et par la nature du plan,

$$s = ap + bq + c,$$

a, b, c étant les trois constantes qui déterminent la position du plan. D'abord, pour que le plan ait avec la surface un point commun, il faut que son équation ait lieu, en supposant que les coordonnées p, q et r deviennent x, y, z, ce qui donnera cette première équation de condition

$$z = ax + by + c.$$

Considérons maintenant un autre point de la surface répondant aux coordonnées $x + i$, $y + k$: l'ordonnée perpendiculaire z deviendra $f(x + i, y + k)$. Faisons aussi dans l'équation du plan, $p = x + i$, $q = y + k$; l'ordonnée perpendiculaire s deviendra $a(x + i) + b(y + k) + c$, et la distance entre les points correspondans de la surface courbe et du plan, sera exprimée par

$$f(x + i, y + k) - a(x + i) - b(y + k) - c;$$

et, en développant, cette différence deviendra

$$f(x,y)+\frac{dz}{dx}i+\frac{dz}{dy}k+\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{i^2}{1.2}+\frac{d^2z}{dx\,dy}\cdot\frac{i}{1}\cdot\frac{k}{1}+\frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{k^2}{1.2}+\text{etc.}$$

$$-ax-by-c-ai-bk;$$

et comme on a déja

$$z=f(x,y)=ax+by+c,\quad \text{d'où}\quad c=z-ax-by,$$

on pourra poser ces deux autres conditions,

$$a=\frac{dz}{dx},\quad b=\frac{dz}{dy},$$

qui détermineront le contact le plus intime entre le plan et la surface au point commun x, y, z. L'équation du plan tangent est donc

$$s=\frac{dz}{dx}p+\frac{dz}{dy}q-\frac{dz}{dx}x-\frac{dz}{dy}y+z,$$

c'est-à-dire,

$$s-z=\frac{dz}{dx}(p-x)+\frac{dz}{dy}(q-y),$$

x, y, z étant les coordonnées du point de tangence, et p, q, s celles du plan tangent.

La position du plan tangent dépend donc des deux coefficiens $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, qui sont ceux des deux différentielles partielles dont se compose la différentielle première complette de $z=f(x,y)$ (chap. XIII); et on déduira ces coefficiens de l'équation de la surface rapportée au point auquel le plan doit être tangent.

La normale étant perpendiculaire au plan tangent au point de contact, aura ses projections sur les plans des xz et des

yz, respectivement perpendiculaires aux traces du plan tangent sur les mêmes plans coordonnés, traces qui ont pour équations

$$s-z=\frac{dz}{dx}(p-x)-y\frac{dz}{dy}\,;\ s-z=\frac{dz}{dy}(q-y)-x\frac{dz}{dx}\,;$$

en sorte que celles des projections de la normale sur les mêmes plans, seront

$$p-x+\frac{dz}{dx}(s-z)=0,\ q-y+\frac{dz}{dy}(s-z)=0,$$

x, y et z étant toujours les coordonnées du point de contact, et p, q, s celles de tous les points de la normale.

Si l'on désigne par α l'inclinaison du plan tangent sur le plan horisontal, et par β l'angle de l'intersection de ces deux plans avec l'axe des abscisses, on sait que le cosinus de l'angle α, a pour expression

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\,;\quad \text{d'où}\quad \operatorname{tang}\alpha=\sqrt{a^2+b^2},$$

a et b étant les tangentes trigonométriques des angles que font les traces du plan tangent dans les plans verticaux, respectivement avec les axes tracés dans le plan horisontal. L'intersection du plan $s=ap+bq+c$ avec celui des xy, a pour équation

$$q=-\frac{a}{b}p-\frac{c}{b},\quad \text{donc}\quad \operatorname{tang}\beta=-\frac{a}{b},$$

et

$$\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

De ces expressions de $\operatorname{tang}\alpha$, $\cos\beta$, $\sin\beta$, on déduit encore

$$a=\sin\beta\operatorname{tang}\alpha,\quad b=\cos\beta\operatorname{tang}\alpha.$$

Si on remplace a par $\frac{dz}{dx}$, b par $\frac{dz}{dy}$, on aura

$$\text{tang}\,\alpha = \sqrt{\left\{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}, \quad \text{tang}\,\beta = -\frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}},$$

élémens qui serviront à fixer la position du plan tangent au point de contact x, y, z.

Si l'équation de la surface est de la forme

$$F(x, y, z) = 0 = u,$$

on en déduira (chap. XIII, pag. 196, 197) celles-ci

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy} = 0,$$

en sorte que le coefficient a d'abord représenté par $\frac{dz}{dx}$, le sera par $-\frac{du}{dx} : \frac{du}{dz}$, et b qui était $\frac{dz}{dy}$, deviendra $\frac{du}{dy} : \frac{du}{dz}$.

Or les équations des projections de la normale, trouvées ci-dessus, pouvant être écrites ainsi

$$p = -\frac{dz}{dx}s + z\frac{dz}{dx} + x,$$

$$q = -\frac{dz}{dy}s + z\frac{dz}{dy} + y,$$

on sait que les cosinus des angles X, Y et Z qu'elle fait respectivement avec les axes des x, y et z, sont

$$\cos X = \frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}},$$

$$\cos Y = \frac{\frac{dz}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}},$$

$$\cos Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}.$$

Maintenant si on remplace $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ par les valeurs que nous venons de déduire de $F(x, y, z) = 0$, on trouvera ces formules très-usitées

$$\cos X = V\frac{du}{dx}, \quad \cos Y = V\frac{du}{dy}, \quad \cos Z = V\frac{du}{dz},$$

en faisant, pour abréger,

$$V = \frac{1}{\sqrt{\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right\}}}.$$

On pourra étendre aux surfaces courbes la théorie des contacts que nous avons exposée relativement aux lignes courbes, et en déduire des résultats semblables.

Soit, à cet effet, l'équation de la sphère

$$s = c + \sqrt{\{R^2 - (p-a)^2 - (q-b)^2\}},$$

p, q, r étant les trois coordonnées d'un point quelconque de la sphère, a, b, c celles de son centre, et R le rayon. En

changeant dans cette équation p, q, r en x, y, z, elle devient

$$z = c + \sqrt{\{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2\}}.$$

Si l'on observe que x et y sont deux variables indépendantes, on trouvera pour le coefficient différentiel $\frac{dz}{dx}$,

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x-a}{\sqrt{\{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2\}}} = -\frac{x-a}{z-c},$$

et pour le coefficient différentiel $\frac{dz}{dy}$,

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y-b}{\sqrt{\{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2\}}} = -\frac{y-b}{z-c};$$

de sorte qu'on a ces trois équations de condition

$$(z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 = R^2,$$

$$x - a + \frac{dz}{dx}(z-c) = 0, \quad y - b + \frac{dz}{dy}(z-c) = 0$$

par lesquelles on pourra déterminer les trois constantes a, b, c, dont les valeurs seront

$$\left.\begin{aligned} a &= x + \frac{R\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}} \\ b &= y + \frac{R\frac{dz}{dy}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}} \\ c &= z - \frac{R}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}} \end{aligned}\right\} \ldots (A)$$

et le rayon R sera encore arbitraire.

La sphère déterminée par ces élémens sera donc tangente à la surface courbe, et, par conséquent, son rayon R sera normal à cette surface; ainsi, en regardant la valeur de ce rayon comme indéterminée, les trois quantités a, b, c seront les coordonnées de la normale à la surface. En effet, des deux dernières équations (A), on déduit

$$\frac{b-y}{c-z}=-\frac{dz}{dy},$$

et de la première et de la dernière

$$\frac{a-x}{c-z}=-\frac{dz}{dx}.$$

Ces équations reviennent à celles-ci

$$b-y=-\frac{dz}{dy}(c-z),$$

$$a-x=-\frac{dz}{dx}(c-z);$$

et en notant les coordonnées a, b, c par p, q, s, on retombe sur les équations de la normale trouvées (pag. 363).

Pour que la sphère devînt osculatrice de la surface, il faudrait encore pouvoir satisfaire aux trois conditions données par les égalités des $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, dans les deux développemens; mais comme il ne reste plus qu'une arbitraire R, il est clair qu'on ne pourra satisfaire à toutes ces équations; d'où il suit qu'il est impossible de trouver, en général, une sphère osculatrice d'une surface, comme on trouve le cercle osculateur d'une courbe, c'est-à-dire, une sphère qui ait avec la surface, un contact du second ordre.

Mais si parmi toutes les sphères touchantes, il ne peut y en avoir aucune qui devienne proprement osculatrice de la

surface, on peut du moins déterminer celle qui sera osculatrice d'une courbe quelconque tracée sur la même surface : pour cela, il n'y aura qu'à supposer y fonction de x, comme dans les courbes à double courbure, et pour avoir alors un contact du second ordre, qui devient possible, il faudra différentier deux fois, dans cette hypothèse, l'équation de la sphère

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2\ldots(1)$$

on aura d'abord (chap. V)

$$x-a+\frac{dy}{dx}(y-b)+(z-c)\left(\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right)=0\ldots(2)$$

en observant que $\frac{dz}{dx}$ est le coefficient de la différentielle de z, prise par rapport à la variable x en dehors de y, et que $\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$ est celui de la différentielle de z, prise par rapport à y, en tant qu'elle est fonction de x. On trouvera de la même manière

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+\left(\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{d^2z}{dxdy}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}\right)(z-c)=0.$$

La première équation est déja satisfaite par les équations trouvées plus haut, savoir :

$$(3)\ldots x-a+\frac{dz}{dx}(z-c)=0, y-b+\frac{dz}{dy}(z-c)=0\ldots(4)$$

ce qui doit être, parce que la courbe est tracée sur la surface par le point où cette surface est touchée par la sphère. Ainsi, il ne reste qu'à satisfaire à l'équation précédente, qui, à raison de la seconde des deux équations ci-dessus, se réduit à celle-ci

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+\left(\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{d^2z}{dx\,dy}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)(z-c)=0\ldots(5)$$

Ainsi les équations (1), (2) et (5) sont les trois conditions suffisantes pour un contact du second ordre, lorsque z est fonction de la seule variable x, ainsi qu'on le suppose dans cette question; et comme on a déja employé (1) avec (3) et (4) pour avoir les équations (A), il restera à employer l'équation (5).

Si l'on substitue dans cette équation (5) la valeur de $z-c$ trouvée plus haut, on pourra déduire de l'équation résultante, la valeur de R, qui sera

$$(B)\ldots R=\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}}{\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{d^2z}{dx\,dy}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Connaissant ainsi le rayon R de la sphère osculaire, on aura, par sa substitution dans les formules (A) qui donnent a, b et c, les valeurs de ces coordonnées du centre.

La quantité $\frac{dy}{dx}$, qui entre dans les expressions précédentes, dépend de la courbe qui est la projection sur le plan horizontal, de celle qu'on considère sur la surface. Cette courbe étant arbitraire, on peut chercher celle dans laquelle le rayon de courbure R sera un *maximum* ou un *minimum*, et pour cela, il n'y aura qu'à égaler à zéro la différentielle de l'expression de R, regardée comme fonction de $\frac{dy}{dx}$; mais pour

simplifier le calcul, nous observerons que puisque les trois équations

$$R = \sqrt{\{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\}};$$

$$x - a + \frac{dz}{dx}(z-c) = 0, \quad y - b + \frac{dz}{dy}(z-c) = 0,$$

donnent

$$R = (z-c)\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}},$$

le *maximum* ou le *minimum* de R, relativement à $\frac{dy}{dx}$, répondra au *maximum* ou au *minimum* de c, la seule des trois coordonnées de R qui entre dans son expression, parce que les coordonnées x, y et z relatives au point de contact, sont constantes : il n'y aura donc qu'à prendre la différentielle par rapport à $\frac{dy}{dx}$, de l'équation trouvée ci-dessus, savoir :

$$(1)\ldots 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{d^2z}{dx\,dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)(z-c) = 0,$$

en supposant nulle la différentielle de c par rapport à $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire, en ne regardant que $\frac{dy}{dx}$ comme variable : on aura, de cette manière, cette équation

$$(2)\ldots \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dy}\left(\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{d^2z}{dx\,dy} + \frac{d^2z}{dy^2}\frac{dy}{dx}\right)(z-c) = 0,$$

laquelle étant combinée avec la précédente, servira à déterminer $\frac{dy}{dx}$ et c.

Si on multiplie (2) par $\frac{dy}{dx}$, et qu'on retranche le produit de (1), on aura l'équation plus simple

$$(3)\ldots 1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dxdy}\,\frac{dy}{dx}\right)(z-c)=0.$$

Par l'élimination de $z-c$ entre (2) et (3), on aura une équation en $\frac{dy}{dx}$ de cette forme

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-B\frac{dy}{dx}-C=0:$$

en faisant, pour abréger,

$$A=\left(1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dxdy}-\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2z}{dy^2},$$

$$B=\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dy^2}-\left(1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dx^2},$$

$$C=\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dxdy}-\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2z}{dx^2},$$

sa résolution donnera

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{(B^2+4AC)}}{2A},$$

équation du premier ordre en x, y, $\frac{dy}{dx}$, puisque z étant, par la nature de la surface, une fonction donnée de x et y, les quantités A, B, C seront aussi des fonctions données de

x et y; donc (chap. VIII) l'équation primitive absolue en x et y renfermera une constante arbitraire, et représentera, à raison des valeurs qu'on peut donner à cette constante, une infinité de courbes qui seront sur le plan des xy, les projections des lignes de plus grande et de moindre courbure de la surface proposée.

Si on combine les deux équations (2) et (3) de manière à faire disparaître les termes où $\frac{dy}{dx}$ est multiplié par $z-c$, on en tirera

$$z-c=\frac{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dy^2}-\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2z}{dxdy}-A\frac{dy}{dx}}{\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2-\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}}.$$

Donc substituant la valeur de $\frac{dy}{dx}$, et faisant de plus

$$E=\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dy^2}+\left(1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dx^2}-2\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}\,\frac{d^2z}{dxdy},$$

on aura

$$M=z-c=\frac{E\pm\sqrt{(B^2+4AC)}}{2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2\right)},$$

et par la substitution de cette valeur dans R (pag. 370), on on obtient

$$(C)\ldots R'=\frac{E\pm\sqrt{[B^2+4AC]}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}}{2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2\right)}$$

$$=M\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}.$$

Les deux valeurs du radical donnent l'une le *maximum*, l'autre le *minimum* du rayon R.

Il passe donc par chaque point de la surface deux courbes qui répondent l'une à une ligne de plus grande, et l'autre à une ligne de moindre courbure; et l'angle sous lequel elles se coupent, dépend de la double valeur de la quantité $\frac{dy}{dx}$, qui représente la tangente de l'angle formé par la tangente à chacune des courbes de projection sur le plan des xy, avec l'axe des x. Or, comme la position du plan des xy est arbitraire, on peut supposer que ce plan coïncide avec le plan tangent de la surface, ou que le plan tangent de la surface soit celui de projection de ces deux courbes; alors les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, deviendront les tangentes des angles que feront avec un même axe pris dans ce plan tangent, les tangentes aux deux branches de plus grande et de moindre courbure; par conséquent la différence de ces angles sera l'angle cherché sous lequel ces branches se coupent; nommant donc γ et δ les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, la tangente de cet angle, sera par les formules connues

$$\frac{\gamma-\delta}{1+\gamma\delta}=\frac{\sqrt{(B^2+4AC)}}{A-C}.$$

mais nous avons trouvé (pag. 364).

$$\text{tang}\,\alpha=\sqrt{\left(\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}.$$

pour tangente de l'inclinaison α du plan tangent sur celui des x, y; donc, dans l'hypothèse actuelle, on doit avoir... tang $\alpha=0$, ce qui ne peut avoir lieu sans qu'on ait $\frac{dz}{dx}=0$,

$\frac{dz}{dy}=0$. Faisant donc dans les expressions de A, B, C, $\frac{dz}{dx}=0$, $\frac{dz}{dy}=0$, on trouvera

$$A=\frac{d^2z}{dxdy};\quad B=\frac{d^2z}{dy^2}-\frac{d^2z}{dx^2};\quad C=\frac{d^2z}{dxdy},$$

ce qui donne

$$A-C=0.$$

Ainsi la tangente de l'angle dont il s'agit, sera infinie, et par conséquent l'angle sera droit. D'où l'on doit conclure, en général, *que les lignes de plus grande et de moindre courbure d'une surface quelconque, se coupent toujours sous un angle droit.*

Nous chercherons à exprimer le rayon R au moyen du plus grand et du plus petit rayon de courbure, que nous désignerons par ρ' et ρ''.

Les hypothèses $\frac{dz}{dx}=0$, $\frac{dz}{dy}=0$ faites dans l'équation,

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-B\frac{dy}{dx}-C=0,$$

la réduisent à celle-ci,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{-\frac{d^2z}{dy^2}+\frac{d^2z}{dx^2}}{\frac{d^2z}{dxdy}}\right)\frac{dy}{dx}-1=0,$$

en sorte que représentant par m et m' les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, on a

$$mm'+1=0,$$

ce qu'on savait déja.

Si l'on fait

$$\frac{d^2z}{dx\,dy}=s,\ \frac{d^2z}{dx^2}=r,\ \frac{d^2z}{dy^2}=t,$$

l'équation en $\frac{dy}{dx}$ peut se mettre sous l'une et l'autre forme,

$$sm^2+(r-t)m-s=0,\ s+\frac{r-t}{m}-\frac{s}{m^2}=0,$$

desquelles on conclut $s=0$, et pour $m=0$, et pour $m=\infty$; donc $\frac{d^2z}{dx\,dy}=0$. Ainsi l'une des tangentes étant prise pour le nouvel axe des x dans le plan tangent, l'autre sera l'axe des y. Ces conséquences $\frac{dz}{dx}=0$, $\frac{dz}{dy}=0$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}=0$, reportées dans l'expression (B) (page 369) font trouver

$$(D)\ldots\ldots R'=\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{r+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

en observant qu'ici le $\frac{dy}{dx}$ est la tangente de l'angle que fait avec le nouvel axe des x qu'on vient de déterminer, la tangente à la courbe à laquelle la sphère du rayon R' est osculaire. Nous désignerons autrement $\frac{dy}{dx}$ par tang V, en sorte qu'on aura aussi

$$(E)\ldots\ldots R'=\frac{1+\operatorname{tang}^2 V}{r+t\operatorname{tang}^2 V}=\frac{1}{r\cos^2 V+t\sin^2 V}.$$

Il s'agit maintenant d'introduire dans cette dernière formule

les plus grand et plus petit rayons de courbure ρ' et ρ''. A cet effet, on fera successivement dans (D) $\frac{dy}{dx}=0$, et $\frac{dy}{dx}=\infty$, hypothèses qui donneront

$$R'=\frac{1}{r} \text{ et } =\frac{1}{t}.$$

Or $\frac{1}{r}$ étant le plus grand rayon de courbure ρ', et $\frac{1}{t}$ le plus petit ρ'', on trouve par ces substitutions dans (E)

$$R'=\frac{\rho'\rho''}{\rho''\cos^2 V+\rho'\sin^2 V} \ldots\ldots (F),$$

expression qu'on mettra aisément sous la forme

$$R'=\frac{2\rho'\rho''}{\rho''+\rho'-(\rho'-\rho'')\cos 2V}.$$

La propriété du *maximum* et du *minimum*, n'est pas la seule qui caractérise les lignes de plus grande et de moindre courbure ; elles sont encore distinguées par rapport à leurs développées ; nous allons donc chercher les conditions nécessaires pour que le rayon de courbure soit partout tangent à la courbe des centres, et pour cela nous nous servirons d'une analyse semblable à celle qui a été employée (pag. 234, 235).

Nous différentierons par rapport à x, y, z, a, b, c, d, R les trois équations (pag. 370)

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,$$

$$x-a+\frac{dz}{dx}(z-c)=0, \quad y-b+\frac{dz}{dy}(z-c)=0,$$

en regardant y comme fonction de x, et z comme fonction de x et y, et nous aurons, en désignant par a', b', c', R'

les coefficiens des différentielles partielles de a, b, c, R, prises par rapport à x,

$$x-a+(y-b)\frac{dy}{dx}+(z-c)\left(\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right)$$
$$-(x-a)a'-(y-b)b'-(z-c)c'=RR',$$

$$1+\frac{dz}{dx}\left(\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right)+(z-c)\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dxdy}\cdot\frac{dy}{dx}\right)$$
$$-a'-c'\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dy}\left(\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right)+(z-c)\left(\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{dy}{dx}\right)$$
$$-b'-c'\frac{dz}{dy}=0,$$

or, d'après les équations (2) et (3) (pag. 370, 371), ces deux dernières se réduisent à

$$a'=-c'\frac{dz}{dx},\quad b'=-c'\frac{dz}{dy},$$

et sous les conditions trouvées plus haut, savoir :

$$x-a+\frac{dz}{dx}(z-c)=0,\quad y-b+\frac{dz}{dy}(z-c)=0;$$

la première devient

$$-(x-a)a'-(y-b)b'-(z-c)c'=RR'.$$

Mais on a trouvé (pag. 366)

$$x-a=-\frac{R\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}},$$

$$y-b=-\frac{R\frac{dz}{dy}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}},$$

$$z-c=+\frac{R}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}};$$

donc, par la substitution de ces valeurs, et de celles de a' et b' dans l'équation précédente, on aura

$$c'=-\frac{R'}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}},$$

et conséquemment

$$a'=+\frac{R'\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}},$$

$$b'=+\frac{R'\frac{dz}{dy}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}.$$

La somme des carrés de ces trois équations, est

$$a'^2+b'^2+c'^2=R'^2,\quad \text{d'où } R'=\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2};$$

c'est-à-dire, en prenant a au lieu de x pour variable indépendante,

$$\frac{dR}{da}=\sqrt{\left\{1+\left(\frac{db}{da}\right)^2+\left(\frac{dc}{da}\right)^2\right\}};$$

d'où l'on conclura (pag. 348) que la quantité R est égale à l'arc de courbe dont a, b, c sont les coordonnées : cette courbe sera donc la véritable développée des lignes de plus grande et de moindre courbure, et ces lignes seront les seules sur la surface, qui puissent avoir une développée formée par les rayons de courbure.

Nous allons déduire de l'équation du plan tangent, celles des surfaces cylindriques, coniques et de révolution, et dans ces applications nous désignerons les coordonnées générales par x, y, z, et celle d'un point particulier par X, Y, Z.

1°. *Des surfaces cylindriques.* Quelle que soit la position du plan tangent à une surface cylindrique, ce plan sera toujours parallèle à la génératrice. Cela posé, soient

$$x=az,\quad y=bz,$$

les équations d'une droite parallèle à la génératrice du cylindre, et passant par l'origine des coordonnées. L'équation du plan tangent mené par un point X, Y, Z de la surface, sera (pag. 362)

$$z-Z=\frac{dZ}{dX}(x-X)+\frac{dZ}{dY}(y-Y)$$

Or, pour que le plan et la droite soient parallèles, il faut qu'on ait (Géom. analyt.), entre les coefficiens a, b, $\frac{dZ}{dX}$, $\frac{dZ}{dY}$, la relation

$$1=a\frac{dZ}{dX}+b\frac{dZ}{dY}, \quad \ldots (A)$$

laquelle exprime qu'une surface est cylindrique, sans cepen-

dant rien prononcer sur la nature de la courbe qui dirige le mouvement de la génératrice, puisque l'équation de cette courbe n'entre pour rien dans le résultat (A).

On pourra donc résoudre cette question : *connaissant la direction de la génératrice, trouver l'équation de la surface cylindrique qui enveloppe une surface courbe donnée.*

Soit $F(x, y, z) = 0$, l'équation de la surface donnée, qui doit être satisfaite par les coordonnées X, Y, Z: après en avoir tiré les valeurs des coefficiens différentiels $\frac{dZ}{dX}$, $\frac{dZ}{dY}$, on les substituera dans l'équation (A) des surfaces cylindriques, et l'équation résultante $f(X, Y, Z) = 0$ appartiendra à la courbe de contact, puisqu'elle appartient à la suite des points de la surface, pour lesquels le plan tangent est continuellement parallèle à une ligne donnée et fixe de position : mais cette courbe étant aussi sur la surface proposée, il s'ensuit que ses deux équations seront

$$F(X, Y, Z) = 0, \quad f(X, Y, Z) = 0,$$

desquelles on déduira les projections de cette courbe.

Si l'on différentie l'équation $u = F(x, y, z) = 0$ de la surface donnée, rapportée aux coordonnées X, Y, Z, on aura (pag. 196, 197)

$$\frac{du}{dX} + \frac{du}{dZ}\frac{dZ}{dX} = 0, \quad \frac{du}{dY} + \frac{du}{dZ}\frac{dZ}{dY} = 0,$$

où $\frac{du}{dX}$, $\frac{du}{dY}$, $\frac{du}{dZ}$ sont fonctions des trois variables X, Y et Z, et de là

$$\frac{dZ}{dX} = -\frac{du}{dX} : \frac{du}{dZ}, \quad \frac{dZ}{dY} = -\frac{du}{dY} : \frac{du}{dZ};$$

les deux points indiquant un quotient : substituant ces valeurs dans l'équation différentielle des surfaces cylindriques, on trouve

$$a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}+b\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}Y}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}Z}=0,$$

qui appartient à la ligne de contact, et qui équivaut à..... $f(X, Y, Z)=0$.

Cela posé, si la génératrice est parallèle à l'axe des z, on a $a=0$, $b=0$, et l'équation de la courbe de contact se réduit à $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}Z}=0$. Eliminant Z entre cette équation et celle de la surface donnée $F(X, Y, Z)=0$, on aura l'équation de la projection de la ligne de contact sur le plan des xy, et par conséquent celle de la courbe qui termine la projection de la surface sur le même plan, courbe qui sert de base au cylindre.

Si la génératrice est parallèle aux x, on a $a=\infty$, et l'équation de la courbe de contact se réduit à $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=0$; donc éliminant X entre cette équation et celle de la courbe donnée, on aura l'équation de la projection de cette courbe sur le plan des yz, et par conséquent celle de la courbe qui termine la projection de la surface sur le même plan.

Enfin, éliminant Y entre $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}Y}=0$ et celle de la surface donnée, on aura l'équation de la courbe qui termine la projection de la surface sur le plan des xz.

2°. *Des surfaces coniques.* Un des caractères des surfaces coniques, celui qui les distingue, est que le plan tangent passe toujours par leur sommet. Soient donc a, b, c, les coordonnées de ce point, et X, Y, Z, celles d'un autre point

de la surface, par lequel doit passer le plan tangent. L'équation du plan tangent au point X, Y, Z, est

$$z - Z = \frac{dZ}{dX}(x - X) + \frac{dZ}{dY}(y - Y)$$

et comme il doit aussi contenir le sommet du cône, elle devient

$$c - Z = \frac{dZ}{dX}(a - X) + \frac{dZ}{dY}(b - Y) \ldots (B)$$

équation qui se rapporte à une surface conique, sans cependant rien supposer sur la nature de la courbe qui lui sert de base.

On pourra donc résoudre ce problème : *étant données les coordonnées du sommet, trouver l'équation de la surface conique individuelle circonscrite à une surface courbe donnée.*

La ligne suivant laquelle se touchent la surface donnée et la surface conique demandée, étant, en général, une courbe à double courbure, il faudra, pour en déterminer les équations, observer que pour tous les points de cette courbe de contact, les deux surfaces ont le même plan tangent, et qu'ainsi les valeurs des coefficiens différentiels $\frac{dZ}{dX}$, $\frac{dZ}{dY}$, déduites des équations de ces deux surfaces, sont les mêmes.

Cela posé, soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface enveloppée par la surface conique, laquelle doit être satisfaite par les coordonnées X, Y, Z : on en tirera les valeurs de $\frac{dZ}{dX}$, $\frac{dZ}{dY}$, qu'on substituera dans l'équation (B) des surfaces coniques, et on aura une autre équation $f(X, Y, Z) = 0$; ces deux équations $F(X, Y, Z) = 0$, $f(X, Y, Z) = 0$, seront celles de la courbe de contact.

Supposons, en premier lieu, que la surface à laquelle la

surface conique doit être circonscrite, soit du second degré, et représentée par l'équation

$$\begin{aligned} &Mz^2 + Ny^2 + Px^2 \\ +\ &2M'yz + 2N'xz + 2P'xy = 1 \\ +\ &2M''z + 2N''y + 2P''x \end{aligned}$$

ce qui donnera pour X, Y, Z, en place de x, y, z, ces coefficiens différentiels

$$\frac{dZ}{dX} = -\frac{PX + P'Y + N'Z + P''}{N'X + M'Y + MZ + M''}.$$

$$\frac{dZ}{dY} = -\frac{P'X + NY + M'Z + N''}{N'X + M'Y + MZ + M''},$$

substituant ces valeurs dans l'équation (B), et retranchant l'équation du second degré, on aura

$$\begin{aligned} &Z\,(N'a + M'b + Mc + M'') \\ +\ &Y\,(P'a + Nb + M'c + N'') \\ +\ &X\,(Pa + P'b + N'c + P'') \\ +\ &\quad P''a + N''b + M''c + 1 = 0, \end{aligned}$$

équation qui appartient à un plan ; d'où il suit que, pour toute surface du second degré, la courbe de contact avec une surface conique circonscrite, est toujours plane. Si la surface est du degré m, sa courbe de contact avec une surface conique circonscrite, est du degré $m - 1$.

Soit, en second lieu, l'équation de la surface enveloppée

$$Mz^2 + Ny^2 + Px^2 + 2Qz + 2Ry + 2Sx = 1 \quad \ldots (1)$$

forme sous laquelle peut être mise l'équation générale des surfaces du second degré ; on en tirera

$$\frac{dZ}{dX} = -\frac{PX + S}{MZ + Q}, \quad \frac{dS}{dY} = -\frac{NY + R}{MZ + Q}.$$

Par la substitution de ces valeurs, l'équation de la surface conique (B) deviendra, après avoir réduit d'après la relation (1) dans laquelle on a remplacé x, y, z par X, Y, Z,

$$(Mc+Q)Z+(Nb+R)Y+(Pa+S)X+(Sa+Rb+Qc+1)=0,$$

que l'on peut mettre sous cette forme

$$\gamma c+\beta b+\alpha a+\delta=0 \ldots (2)$$

équation qui appartient à un plan, puisqu'elle est linéaire en X, Y et Z. Des équations (1) et (2) qui sont $F(X,Y,Z)=0$, $f(X,Y,Z)=0$, on conclut que la courbe de contact d'une surface quelconque du second degré et d'une surface conique, est toujours plane.

Il est évident que le plan qui contient la courbe de contact, sera fixe, si les coordonnées a, b, c sont fixes elles-mêmes, puisque toutes les autres quantités M, N, P, etc. qui entrent dans l'équation de ce plan sont constantes; mais que sa position varie avec le sommet du cône. Supposons que ce sommet se meuve sur la surface de l'équation

$$M'c^2+N'b^2+P'a^2=1 \ldots (3):$$

si l'on considère deux positions consécutives du plan de la courbe de contact, correspondantes à deux positions infiniment voisines du sommet du cône, les coordonnées X, Y, Z de la droite intersection des deux plans, seront constantes, tandis que celles a, b, c du sommet auront varié; puisque les premières se rapportent à la suite des points du plan de la courbe de contact, dont les coordonnées ne varient pas, quand le plan lui-même a infiniment peu varié de position par le déplacement infiniment petit du sommet; les équations de cette droite seront donc

$$\gamma c+\beta b+\alpha a+\delta=0,\quad \gamma dc+\beta db+\alpha da=0 \ldots (4)$$

mais il faut dire, de plus, que le sommet de la surface conique se meut sur la surface directrice, ou d'une manière compatible avec la nature de cette surface, ce qui donne

$$M'c\mathrm{d}c + N'b\mathrm{d}b + P'a\mathrm{d}a = 0.$$

Eliminant dc entre cette équation et la seconde des deux précédentes, on aura ce résultat,

$$(M'\beta c - N'\gamma b)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a} + (M'\alpha c - P'\gamma a) = 0.$$

Or la direction suivant laquelle le point se meut sur la surface (3), étant arbitraire; il en est de même du rapport $\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a}$ qui, comme on le sait, exprime l'angle avec l'axe des x, de la projection horisontale de la route du point dans l'espace : on a donc $\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a} = \frac{0}{0}$, et conséquemment

(5) . . . $M'\beta c - N'\gamma b = 0$, $M'\alpha c - P'\gamma a = 0$ . . . (6)

Il résulte de là que les coordonnées X, Y, Z, déduites des équations (2), (5), (6), et déterminées par ces équations, sont celles du point commun à trois plans de contact consécutifs et quelconques, point qui est sur le plan (2). Ce plan variable de position par a, b, c, est donc le lieu de tous les points pareils fournis par d'autres positions du sommet du cône enveloppant, et conséquemment, il est le plan tangent à la surface formée de tous ces points X, Y, Z. Pour obtenir l'équation de cette surface, on éliminera a, b, c entre les équations (2), (3), (5) et (6) : à cet effet, on multipliera (5) et (6) respectivement par b et a, et on aura cette somme de produits

$$(P'a^2 + N'b^2)\gamma = M'c(\alpha a + \beta b).$$

Ajoutant de part et d'autre $M'\gamma c^2$, élevant chacun des deux membres aux carrés, et réduisant d'après les relations (2) et (3), on trouvera

$$\gamma^2 = M'^2\delta^2 c^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{\gamma^2}{M'^2 c^2} = \delta^2.$$

D'un autre côté, les équations (5) et (6) élevées au carré, donnent

$$M'^2\beta^2 c^2 = N'^2\gamma^2 b^2, \quad M'^2\alpha^2 c^2 = P'^2\gamma^2 a^2,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\beta^2}{N'} = \frac{N'\gamma^2 b^2}{M'^2 c^2}, \quad \frac{\alpha^2}{P'} = \frac{P'\gamma^2 a^2}{M'^2 c^2}.$$

Faisant une somme de ces dernières équations et de l'équation identique $\frac{\gamma^2}{M'} = \frac{\gamma^2}{M'}$, il vient, après les réductions,

$$\frac{\gamma^2}{M'} + \frac{\beta^2}{N'} + \frac{\alpha^2}{P'} = \frac{\gamma^2}{M'^2 c^2};$$

mais $\frac{\gamma^2}{M'^2 c^2} = \delta^2$; donc

$$N'P'\gamma^2 + M'P'\beta^2 + M'N'\alpha^2 = M'N'P'\delta^2 \quad . \; . \; . \; (7)$$

résultat indépendant de a, b, c, et qui est du second degré en X, Y, Z, puisque α, β, γ sont des fonctions linéaires de ces variables. Donc *si une surface conique touche et enveloppe constamment une surface courbe quelconque du second degré, pendant que son sommet parcourt une autre surface du second degré, située comme on voudra dans l'espace, mais douée d'un centre, le plan de la courbe de contact des deux surfaces, touchera toujours une troisième surface du second degré.*

Voyez encore les Mémoires de MM. *Livet* et *Brianchon*, insérés dans le 13[e]. cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique.

3°. *Des surfaces de révolution.* Une des propriétés caractéristiques des surfaces de révolution, et qui est indépendante de la nature de la courbe génératrice qui, en tournant autour de l'axe, engendre la surface, est que le plan tangent est toujours perpendiculaire au plan mené par le point de contact et par l'axe de la surface, et qu'on nomme *plan méridien*.

Soient donc

$$x = Az + a, \quad y = Bz + b,$$

les équations données de l'axe de révolution, et X, Y, Z les coordonnées du point de contact; l'équation du plan méridien, en tant qu'il passe par le point de contact, est de la forme

$$z - Z = M(x - X) + N(y - Y).$$

On assujétira ce plan à passer par l'axe, en déterminant les deux élémens de position M et N, d'après ces deux équations de condition,

$$MA + NB = 1, \quad Ma + Nb - MX - NY + Z = 0,$$

données (*Elém. de Géom. analyt.*), et desquelles on tire facilement

$$M\{A(b - Y) - B(a - X)\} = \quad b - Y + BZ,$$
$$N\{A(b - Y) - B(a - X)\} = -(a - X + AZ).$$

Ainsi l'équation du plan méridien mené par le point de contact, est

$$(z - Z)\{A(b - Y) - B(a - X)\}$$
$$= (b - Y + BZ)(x - X) - (a - X + AZ)(y - Y).$$

Or, l'équation du plan tangent est

$$z - Z = (x - X)\left(\frac{dZ}{dX}\right) + (y - Y)\left(\frac{dX}{dY}\right),$$

et ces deux plans seront rectangulaires entre eux, si l'on a la relation (*Géom. analyt.*)

$$\frac{b - Y + BZ}{A(b - Y) - B(a - X)}\left(\frac{dZ}{dX}\right)$$
$$-\frac{a - X + AZ}{A(b - Y) - B(a - X)}\left(\frac{dZ}{dY}\right) + 1 = 0,$$

c'est-à-dire,

$$(b - Y + BZ)\left(\frac{dZ}{dX}\right)$$
$$-(a - X + AZ)\left(\frac{dZ}{dY}\right) + A(b - Y) - B(a - Z) = 0 \ldots (A)$$

Donc cette dernière équation exprime qu'une surface est de révolution autour d'un axe déterminé de position par les constantes A, B, a, b, sans rien prononcer sur la nature de la génératrice.

On peut être conduit à la même équation par la considération de la normale. En effet, les surfaces de révolution jouissent encore de cette propriété que la normale en tout point de ces surfaces, coupe toujours l'axe de révolution. On a trouvé (pag. 363) pour les équations de la normale

$$x - X + (z - Z)\left(\frac{dZ}{dX}\right) = 0,$$

$$y - Y + (z - Z)\left(\frac{dZ}{dY}\right) = 0.$$

Pour que cette droite coupe l'axe, il faut que ses équations et celles de l'axe aient lieu en même tems, indépendamment des valeurs de x, y, z, ou, qu'en éliminant x, y, z de ces quatre équations, l'équation résultante soit satisfaite. Or, cette élimination conduit encore à l'équation (A).

Une surface courbe étant coupée par une suite de plans parallèles entre eux, on demande l'équation de la ligne perpendiculaire aux sections de la surface par ces plans.

Nous supposerons la surface courbe quelconque; lorsqu'elle est de révolution et que les plans coupans sont perpendiculaires à l'axe de révolution, la ligne perpendiculaire cherchée est évidemment une des génératrices de la surface.

Prenons pour plan coupant celui des xy; car par une simple transformation des coordonnées, on peut toujours rentrer dans cette hypothèse. La courbe cherchée, en tant qu'elle est sur la surface, sera complettement connue par sa projection sur le plan des xy : nous désignerons par $y = Fx$ cette projection. Pour que la courbe cherchée et la section parallèle au plan des xy, soient perpendiculaires entre elles, il faut que leurs tangentes au point d'intersection soient aussi perpendiculaires l'une à l'autre, ce qui aura lieu si on assujétit les projections de ces tangentes sur le plan xy, à se rencontrer à angle droit; ainsi, en représentant ces projections par $y = ax + \alpha$, $y = a'x + \alpha'$, il faudra satisfaire à la condition $1 + aa' = 0$. Mais $a = \frac{dy}{dx}$, ce coefficient différentiel étant déduit de l'équation $y = Fx$, et $a' = \frac{dy}{dx}$, ce coefficient étant tiré de l'équation de la surface, en regardant z comme une constante, puisqu'il s'agit d'une section parallèle au plan xy. Ainsi, connaissant l'équation de la surface, on la différentiera par rapport

à x et y, on éliminera z entre l'équation et la différentielle, et de ce résultat on tirera la valeur de $\frac{dy}{dx} = a'$ en x, y; on reportera cette valeur dans la relation $1 + aa' = 0$, dans laquelle on écrira aussi $\frac{dy}{dx}$ pour a, et on aura ainsi l'équation différentielle de la courbe cherchée, qu'on cherchera à intégrer : la constante introduite par cette intégration, est déterminée par la condition que la courbe passe par un point connu.

Prenons, pour exemple, les surfaces de révolution coupées perpendiculairement à l'axe, et dont l'équation est

$$x^2 + y^2 = \varphi z \ (*) \ . \ . \ . \ . \ (M)$$

(*) Les surfaces de révolution dont nous avons fait connaître un caractère distinctif, en ont un second encore indépendant de la nature de la courbe génératrice; c'est que si on les coupe par un plan quelconque perpendiculaire à l'axe de révolution, on a pour section la circonférence d'un cercle dont le centre est dans l'axe de révolution, et dont tous les points sont, par conséquent, à égales distances d'un même point pris sur l'axe; or, les équations de l'axe de révolution étant comme ci-dessus,

$$x = Az + a, \quad y = Bz + b,$$

celle du plan perpendiculaire à l'axe sera (*Géom. analyt.*)

$$Ax + By + z = \alpha,$$

dans laquelle la quantité α détermine la position de ce plan, est constante pour le même plan perpendiculaire, et variable avec la position de ce plan; de plus, l'axe de révolution rencontre le plan des x, y dans un point dont les coordonnées sont $x = a$, $y = b$, $z = 0$; et si l'on regarde ce point comme le centre commun d'une suite de sphères concentriques, l'équation générale des surfaces de ces sphères, sera

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = \zeta^2,$$

dans laquelle le rayon ζ est constant dans la même sphère, et variable en

en supposant que l'axe de la surface soit aussi celui des z. Si l'on différentie par rapport à x et y, on trouve . . . . .
$a'=\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$: cette valeur portée dans $1+aa'=0$, donne $1-a\frac{x}{y}=0$, ou $1-\frac{x}{y}.\frac{dy}{dx}$, à cause de $a=\frac{dy}{dx}$: on déduit de là

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},$$

---

passant d'une sphère à une autre. Cela posé, si le point que l'on considère sur la surface de révolution, se meut sûr cette surface sans sortir du même plan perpendiculaire à l'axe, il ne sortira pas non plus de la même surface de sphère, il restera sur la circonférence intersection des deux surfaces; mais si ce point, en se mouvant, sort du plan perpendiculaire à l'axe, il passera sur la surface d'une autre sphère, et sur une autre circonférence intersection de la surface de révolution par cette nouvelle sphère, et les quantités α et $\mathcal{C}$ auront toutes deux varié. Les surfaces de révolution sont donc telles que les quantités α et $\mathcal{C}^2$, ou les quantités respectivement équivalentes $Ax+By+z$, $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2$, sont constantes ensemble et variables ensemble; on a donc pour équation de ces surfaces $\mathcal{C}^2=\varphi\alpha$, c'est-à-dire,

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=\varphi(Ax+By+z),$$

dans laquelle φ indique une fonction quelconque dont la forme dépend de la courbe génératrice. Dans cette équation, x, y, z sont les coordonnées des points de chacune des circonférences, intersection de chacune des sphères par l'un des plans parallèles à celui des x, y, de sorte que la surface de révolution est particularisée par la courbe génératrice. Si l'axe de révolution passe par l'origine et est parallèle aux z, on a $A=0$, $B=0$, $a=0$, $b=0$, et l'équation précédente devient

$$x^2+y^2=\varphi z,$$

en comprenant dans φz le terme $-z^2$: c'est l'équation (M).

équation différentielle dont l'équation primitive est

$$lx = ly + lM = lMy,$$

l désignant un logarithme népérien, et lM étant la constante. De l'égalité des logarithmes, on déduit celle des nombres, en sorte que

$$x = My,$$

ce qui est l'équation d'une droite passant par l'origine, droite qui est en même tems la projection d'une position de la courbe génératrice. On voit confirmée par là cette propriété de la courbe génératrice d'être toujours perpendiculaire aux sections circulaires faites dans une surface quelconque de révolution. La même méthode s'applique aux surfaces courbes du second degré ayant un centre; ces surfaces, représentées généralement par

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 1,$$

sont, pour $L = M$, de révolution autour de l'axe des z (*Géom. analyt.*); et en effet, l'équation

$$x^2 + y^2 = \frac{1 - Nz^2}{L},$$

rentre dans l'équation générale (A).

CHAPITRE XXIV.

Cubature des solides, et mesure des surfaces courbes qui ne sont pas de révolution.

SOIT $z = f(x, y)$ l'équation d'une surface courbe; menons quatre plans parallèles deux à deux à ceux des xz et des yz, et cherchons d'abord le volume V du corps qui repose sur le rectangle xy, et qui se termine à la surface courbe. Ce volume V sera une fonction de x, y, que nous désignerons par $F(x, y)$; en sorte que x devenant $x + i$, et y devenant $y + k$, l'accroissement de volume, sera

$$\frac{dV}{dx}i + \frac{dV}{dy}k + \frac{d^2V}{dx^2}\cdot\frac{i^2}{2} + \frac{d^2V}{dxdy}ik + \frac{d^2V}{dy^2}\cdot\frac{k^2}{2} + \text{etc.}$$

c'est-à-dire, la somme des trois volumes construits sur les rectangles iy, xk et ik. Or, l'accroissement de volume dû au seul changement de x en $x + i$, c'est-à-dire, le volume qui a pour base le rectangle iy, est exprimé par

$$\frac{dV}{dx} + \frac{d^2V}{dx^2}\,\frac{i^2}{1.2} + \frac{d^3V}{dy^3}\,\frac{i^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

et l'accroissement de volume dû au seul changement de y en $y + k$, c'est-à-dire, celui qui repose sur la base xk, est noté par

$$\frac{dV}{dy} + \frac{d^2V}{dy^2}\,\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3V}{dy^3}\,\frac{k^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Si de l'accroissement total du volume correspondant aux accroissemens i de x et k de y, on retranche la somme des accroissemens partiels représentés par les deux développemens précédens, on aura pour différence le volume qui s'appuie sur le rectangle ik, lequel est conséquemment exprimé par

$$\frac{d^2 V}{dx\,dy} ik + \text{etc.}$$

Nous chercherons deux limites de ce volume, l'une toujours plus grande, l'autre toujours moindre, quelque petits que soient i et k. A cet effet, nous mènerons deux plans parallèles à celui des xy, par les extrémités des deux ordonnées z et z', correspondantes la première à x et y, la seconde à $x+i$ et $y+k$; et en supposant que les ordonnées z croissent toujours avec x et y, que la surface soit toute entière convexe ou concave vers le plan horisontal, et qu'elle ne renferme pas de points singuliers, il faudra que la différence entre les parallélipipèdes excédens et déficiens, savoir : $ik.z' - ikz$ soit toujours plus grande que $\frac{d^2 V}{dx\,dy} ik + \text{etc.} - ikz$, quelque petits que soient les accroissemens i et k; on doit donc avoir, après la division par ik, l'inégalité

$$\frac{d^2 V}{dxdy} - z + \frac{d^3 V}{dx^3}\frac{i^3}{1.2.3} + \text{etc.} < \left(\frac{dz}{dx} i + \frac{dz}{dy} k + \text{etc.}\right).$$

En employant les limites données (chap. XIV), et des considérations analogues à celles dont on a fait usage (chap. XVII, XXI), on prouvera que cette inégalité ne peut avoir lieu pour des accroissemens i et k aussi petits qu'on voudra, à moins que le terme du premier membre, indépendant de ces ac-

croissemens, ne soit nul, et alors on a cette condition

$$\frac{d^2 V}{dx dy} = z.$$

La même conclusion aurait encore lieu en supposant que les ordonnées z allassent en diminuant depuis x et y, jusqu'à $x + i$ et $y + k$.

Ainsi après avoir remplacé z par $f(x, y)$, et mis le premier membre sous l'une de ces deux formes (chap. XIII) $\frac{d\left(\frac{dV}{dy}\right)}{dx}$ ou $\frac{d\left(\frac{dV}{dx}\right)}{dy}$, sous la seconde, par exemple, on aura

$$\frac{d\left(\frac{dV}{dx}\right)}{dy} = f(x, y), \quad \text{d'où} \quad d\left(\frac{dV}{dx}\right) = dy\, f(x, y),$$

intégrant par rapport à y seulement, puisque le coefficient différentiel d'où l'on part, est celui de la différentielle $\frac{dV}{dx}$ prise par rapport à y, on obtiendra

$$\frac{dV}{dx} = \int dy\, f(x, y),$$

et de là

$$dV = dx \int dy\, f(x, y),$$

la seconde intégrale qui donne V, doit être prise par rapport à x seulement, en sorte que

$$V = \int dx \int dy\, f(x, y).$$

On indique ordinairement ces deux intégrales par le double signe $\int\int$, en cette manière

$$V = \int\int dx dy \,.\, f(x, y),$$

et on intègre deux fois en regardant à volonté, d'abord x, puis y comme une constante; et ayant soin de completter chaque intégrale par une constante qu'on déterminera en ayant égard aux limites données par la question. Par exemple, si le volume V est compris entre deux plans parallèles à celui des xz, plans ayant pour équations $y=a$, $y=b$, et qu'on ait d'abord intégré par rapport à y, on prendra cette intégrale depuis $y=a$, jusqu'a $y=b$ (chap. XVII, pag. 258), et le résultat sera délivré de y; mais il contiendra l'autre quantité x qui a été regardée comme constante : on intégrera de nouveau depuis la plus petite jusqu'à la plus grande valeur de x, c'est-à-dire, depuis $x=a'$ jusqu'à $x=b'$, a' et b' étant les équations de deux plans parallèles à celui des yz, et on aura ainsi le volume compris entre les quatre plans verticaux et parallèles deux à deux, le plan horisontal et la surface courbe. Voyez, au reste, pour les applications, la seconde partie de l'ouvrage.

Passons à la mesure des surfaces.

Je considère la portion de surface courbe interceptée par le parallélipipède qui a pour base le rectangle ik, et je la suppose toute entière convexe ou concave vers le plan horisontal, et telle qu'elle ne renferme pas de points singuliers : cette surface parallelogrammique est comprise entre celles des deux parallélogrammes tangens menés par les extrémités de la plus grande et de la plus petite ordonnée, et inscrits entre les faces du parallélipipède qui s'appuie sur le rectangle ik : car on peut regarder comme évident qu'une surface est plus grande qu'une autre avec laquelle elle a un point commun; lorsque l'on peut mener par ce point, et tous ceux du contour de la moindre surface, des plans qui coupent la plus grande surface suivant des lignes toutes différentes, et plus longues chacune que l'intersection correspondante dans l'autre surface. Si, dans cette hypothèse, on considère d'abord le plan tangent qui passe par l'extrémité de la plus grande ordonnée verticale

$f(x+i, y+k)$, il est évident que tous les plans verticaux menés par le point $z+h$, $x+i$, $y+k$, et par les différens points du contour de la portion de surface courbe qu'on considère, couperont le parallélogramme tangent, et la surface courbe suivant deux lignes, dont l'une droite, sera tangente à l'autre qui sera une courbe, et toutes ces tangentes seront différentes. Or, en supposant la surface courbe concave vers le plan xy, chacune de ces tangentes étant menée par l'extrémité de la plus grande ordonnée d'un arc de courbe, et terminée à la rencontre de l'ordonnée qui passe par l'autre extrémité, a une longueur moindre que l'arc rectifié (pag. 262) : ainsi l'aire du parallélogramme formé de ces tangentes, sera moindre que celle de la portion correspondante de surface courbe : on prouverait de même que cette dernière est moindre que celle du parallélogramme tangent à l'extrémité de la plus petite ordonnée : donc elle est comprise entre les deux. Il s'agit donc de déterminer les surfaces des parallélogrammes tangens aux points x, y, z, et $x+i$, $y+k$, $z+h$. Or, on sait (pag. 563, 564) que le plan tangent au point x, y, z, fait avec le plan des x, y un angle dont le cosinus est

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}},$$

et comme l'aire d'un parallélogramme situé dans l'espace, est égale à celle de sa projection sur le plan xy divisée par le cosinus de l'angle que fait son plan prolongé avec le même plan de projection, il s'ensuit qu'en faisant $X=x+i$, $Y=y+k$, on aura pour expression de cette aire

$$(X-x)(Y-y)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

En changeant dans $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, les coordonnées x et y en $x+i$ et $y+k$, cette expression deviendra celle de l'aire qui est l'autre limite : ainsi en observant que $X-x=i=dx$, $Y-y=k=dy$, on aura

$$dxdy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

pour terme commun aux deux limites. Maintenant si l'on représente par $F(x, y)=U$ la surface courbe parallélogrammique qu'il s'agit d'évaluer, on aura

$$F(X,Y)-F(x,Y)-F(X,y)+F(x,y),$$

pour l'expression de l'aire de la surface courbe, interceptée entre les aires limites. Si l'on développe cette dernière formule suivant les puissances de i et k, ou de dx et dy, et les produits de ces puissances, on trouvera $\frac{d^2U}{dxdy}dxdy$ pour premier terme de ce développement. En sorte qu'en posant l'égalité convenable, on conclura, comme on l'a fait dans les cas analogues, qu'elle ne peut avoir lieu, quelque petits que soient les accroissemens dx et dy, que sous la condition

$$\frac{d^2U}{dxdy}=\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2};$$

relation de laquelle on déduit $U=F(x, y)$ par une double intégration.

Il faudra donc différentier l'équation de la surface $z=f(x,y)$, ce qui donnera $dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy$, puis reporter les va-

leurs en x et y des coefficiens $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ dans l'égalité ci-dessus, et enfin effectuer la double intégration

$$U=\int\int dx dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}..$$

Nous renverrons toujours pour les applications à la seconde partie de cet Ouvrage.

CHAPITRE XXV.

Des plus grandes et des moindres valeurs des fonctions de plusieurs variables.

La distinction du *maximum* d'avec le *minimum*, n'est pas aussi facile à l'égard des fonctions de plusieurs variables qu'elle l'est à l'égard des fonctions d'une seule variable, quoiqu'elle repose toujours sur les mêmes principes. Cette question très-importante sera le sujet de ce chapitre qui complettera la théorie des plus grands et des moindres.

D'abord à l'égard des fonctions de deux variables, nous avons vu (pag. 364) qu'en désignant par α l'inclinaison du plan tangent à une surface, sur le plan des xy, on avait cette expression de tang α,

$$\text{tang}\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Si donc on demande les plus grandes ou les moindres ordonnées z, il est aisé de concevoir qu'elles ne peuvent répondre qu'aux points où le plan tangent devient parallèle à celui des yx; donc, en ces points, on aura tang $\alpha = 0$, et par conséquent

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = 0,$$

condition qui emporte celles-ci

$$\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 0:$$

et qui sont nécessaires pour que l'ordonnée z devienne un *maximum* ou un *minimum*.

Ainsi pour qu'une fonction de deux variables indépendantes, devienne *maximum* ou *minimum*, il faut que ses deux coefficiens différentiels du premier ordre, l'un relatif à la différentielle partielle de la fonction, prise par rapport à x, l'autre relatif à la différentielle partielle de la même fonction, prise par rapport à y, soient individuellement nuls. On tirera de ces deux conditions les seules valeurs de x et y, par lesquelles la fonction proposée $f(x,y)$ puisse devenir *maximum* ou *minimum*.

Mais on peut rappeler cette question à celle des plus grands et des moindres des fonctions à une seule variable, et trouver, en même tems, les conditions nécessaires pour que le *maximum* ou le *minimum* ait lieu. En effet, u étant, au-lieu de z, fonction de x, y, on peut supposer qu'on connaïsse déja la valeur de x qui convient soit au *maximum* soit au *minimum*, et alors il reste à chercher le *maximum* ou le *minimum* de u relativement à l'autre variable y. On aura donc (pag. 269)

$$\frac{du}{dy}=0\ldots\ldots(1),$$

et pour le *maximum*

$$\frac{d^2u}{dy^2}<0\ldots\ldots(2),$$

et pour le *minimum*

$$\frac{d^2u}{dy^2}>0\ldots\ldots(3).$$

Si donc on substitue dans u la valeur de y tirée de (1), u deviendra une fonction de la seule variable x, et cette fonction sera déja un *maximum* ou un *minimum* relativement à y : il n'y aura donc plus qu'à la rendre encore un *maximum* ou un *minimum* relativement à la quantité x que nous avons

regardée comme constante. Or, y étant une fonction x, laquelle est donnée par l'équation (1); il faudra dans $u = f(x, y)$ tenir compte de cette circonstance, et exprimer convenablement les conditions

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{d^2u}{dx^2} < \text{ou} > 0,$$

relatives à l'existence d'un *maximum* ou d'un *minimum* d'une fonction de la variable x. Or on a (chap. V)

$$\frac{du}{dx} + y' \frac{du}{dy} = u',$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2y' \frac{d^2u}{dxdy} + y'^2 \frac{d^2u}{dy^2} + y'' \frac{du}{dy} = u'',$$

u' et u'' étant les dérivées première et seconde, prises non-seulement par rapport à la variable x en évidence dans.... $f(x, y)$, mais encore par rapport à cette variable contenue dans y. Mais à cause de $\frac{du}{dy} = 0$, la valeur de u' se réduit à $\frac{du}{dx}$, et conséquemment la condition $u' = 0$, devient

$$\frac{du}{dx} = 0.$$

Or $\frac{du}{dx}$ est le coefficient de la différentielle de u, prise en regardant y comme une constante; donc $\frac{du}{dy}$ et $\frac{du}{dx}$ sont les mêmes fonctions que nous avions désignées plus haut par $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dx}$; de sorte qu'on aura pour déterminer x et y, les deux équations

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0.$$

Il faut de plus qu'on ait $u'' < 0$ pour le *maximum*, et > 0 pour le *minimum* : mais à cause de $\frac{du}{dy} = 0$, u'' se réduit à

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2y'\frac{d^2u}{dx\,dy} + y'^2\frac{d^2u}{dy^2} \dots (5),$$

et comme y est donné par $\frac{du}{dy} = 0$, le coefficient différentiel y' le sera par

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} + y'\frac{d^2u}{dy^2} = 0, \quad \text{d'où } y' = -\frac{d^2u}{dx\,dy} : \frac{d^2u}{dy^2},$$

les deux points rappelant un quotient : la substitution de cette valeur dans (5) donnera donc cette condition

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2}{\frac{d^2u}{dy^2}} < 0 \dots (6),$$

pour le *maximum*, et celle-ci

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2}{\frac{d^2u}{dy^2}} > 0 \dots (7),$$

pour le *minimum*.

Or si l'on multiplie le premier membre de l'inégalité (6), négatif pour le *maximum*, par la quantité $\frac{d^2u}{dy^2}$, négative dans le même cas ; et celui de l'inégalité (7), positif pour le *minimum*, par la quantité $\frac{d^2u}{dy^2}$ positive en même tems, on

aura deux résultats positifs ; de sorte que la condition

$$\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{d^2u}{dy^2}-\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2>0\ldots.(8),$$

sera commune au *maximum* et au *minimum*.

Ainsi, les valeurs de x et de y, tirées de

$$\frac{du}{dx}=0,\quad \frac{du}{dy}=0,$$

donneront un *maximum* ou un *minimum*, suivant qu'elles rendront

$$\frac{d^2u}{dy^2}<0 \text{ ou } >0,$$

pourvu qu'on ait, en même tems, la condition (8), laquelle exige que les deux fonctions $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$ prennent le même signe, après la substitution des valeurs de x et y.

Si donc

$$\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{d^2u}{dy^2}-\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2<\text{ou}=0,$$

il n'y aura ni *maximum* ni *minimum*, à moins que les coefficiens différentiels $\frac{d^3u}{dx^3}$, $\frac{d^3u}{dy^3}$ ne disparaissent en même tems, auquel cas le jugement dépendra des suivans, et ainsi de suite.

Nous appliquerons ce qui vient d'être dit à la solution de quelques questions.

1°. *Trouver la plus courte distance entre deux lignes droites données de position dans l'espace.*

L'analyse dont nous allons faire usage, démontre cette propriété de la plus courte distance, d'être en même tems perpendiculaire aux deux droites données.

Soient

$$\left.\begin{array}{ll} x = az + \alpha, & X = a'Z + \alpha' \\ y = bz + \beta, & Y = b'Z + \beta' \end{array}\right\}\ldots(1),$$

les équations des deux projections verticales des deux droites données : le carré de la distance entre deux points x, y, z; X, Y, Z pris sur ces deux droites, sera, en la représentant par $2u$,

$$(\alpha-\alpha'+az-a'Z)^2+(\beta-\beta'+bz-b'Z)^2+(z-Z)^2=2u\ldots(2)$$

Il faudra donc, d'après la règle, et à cause de l'indépendance des deux variables z et Z, égaler séparément à zéro, les coefficiens des différentielles de $2u$, prises l'une par rapport à z, l'autre par rapport à Z. On aura donc pour déterminer z et Z ces deux conditions

$$\frac{du}{dz} = a\,(\alpha-\alpha'+az-a'Z)+b\,(\beta-\beta'+bz-b'Z) \\ +z-Z=0\ldots(3),$$

$$\frac{du}{dZ} = -a'(\alpha-\alpha'+az-a'Z)-b'(\beta-\beta'+bz-b'Z) \\ -(z-Z)=0\ldots(4).$$

Il est d'abord facile de s'assurer que ces équations répondent au *minimum*, puisqu'on a

$$\frac{d^2u}{dz^2}=a^2+b^2+1,\quad \frac{d^2u}{dZ^2}=+a'^2+b'^2+1,$$

$$\frac{d^2u}{dz\,dZ}=-aa'-bb'-1\,;$$

d'où il résulte que

$$\frac{d^2u}{dz^2}\cdot\frac{d^2u}{dZ^2}-\left(\frac{d^2u}{dz\,dZ}\right)^2=(a^2+b^2+1)(a'^2+b'^2+1)-(aa'+bb'+1)^2$$

$$=(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-ba')^2>0.$$

Pour parvenir à la propriété énoncée, on observera que la droite *minimum* devant passer par le point x, y, z; X, Y, Z; ses équations sont de la forme

$$\left.\begin{array}{l} x - X = a''(z - Z) \\ y - Y = b''(z - Z) \end{array}\right\}\ldots(5),$$

et par la substitution des valeurs de x, y, X et Y tirées de (1), elles deviennent

$$\left.\begin{array}{l} \alpha - \alpha' + az - a'Z = a''(z - Z) \\ \beta - \beta' + bz - b'Z = b''(z - Z) \end{array}\right\}\ldots(6),$$

et de là les formules (3) et (4) se réduisent respectivement à

$$1 + aa'' + bb'' = 0, \quad 1 + a'a'' + b'b'' = 0,$$

relations desquelles on conclut d'abord (*Géom. analyt.*) que la droite *minimum* est, en même tems, perpendiculaire aux deux droites données; et on en tire, en second lieu

$$a'' = \frac{b' - b}{a'b - ab'}, \quad b'' = \frac{a - a'}{a'b - ab'}\ldots(7).$$

Actuellement si on résout les équations (3) et (4) par rapport aux inconnues z et Z, on obtiendra

$$z - Z = \frac{(a'b - ab')\{(b - b')(\alpha - \alpha') - (a - a')(\beta - \beta')\}}{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (a'b - ab')^2}.$$

Mais l'expression

$$\sqrt{(\alpha - \alpha' + az - a'Z)^2 + (\beta - \beta' + bz - b'Z)^2 + (z - Z)^2},$$

de la plus courte distance, devient en vertu des formules (6) et (7),

$$\mu = \frac{z - Z}{a'b - ab'}\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (a'b - ab')^2};$$

et en y substituant pour $z - Z$ sa valeur précédente, on obtient

$$u = \frac{(b - b')(\alpha - \alpha') - (a - a')(\beta - \beta')}{\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (a'b - ab')^2}},$$

résultat conforme à celui trouvé (*Elém. d'Analy. géomét.*).

2°. *Déterminer la route la plus courte pour aller d'un point à un autre, en passant par un plan donné de position par rapport à ces deux points.*

Nous prendrons pour plan des xy le plan donné, et pour celui des xz le plan qui passe par les deux points donnés M' et M'', le plan des xz étant toujours perpendiculaire au plan des xy. Les coordonnées des points donnés M' et M'' sont $X, Y = 0, Z$; $X', Y' = 0, Z'$ et celles du point inconnu N sont $x, y, z = 0$. On a donc la condition Fig. 49.

$$M'N + NM'' = \sqrt{(x-X)^2 + y^2 + Z^2} + \sqrt{(x-X')^2 + y^2 + Z'^2}$$
$$= minimum.$$

Comme ici les variables x et y sont indépendantes, on prendra les différentielles successivement par rapport à x et à y, et on égalera les coefficiens à zéro, ce qui donnera ces deux équations de condition

$$\frac{x - X}{\sqrt{P}} + \frac{x - X'}{\sqrt{P'}} = 0,$$

$$\frac{y}{\sqrt{P}} + \frac{y}{\sqrt{P'}} = 0,$$

$\sqrt{P}$ étant $= \sqrt{(x - X)^2 + y^2 + Z^2}$, ...

et $\sqrt{P'}$ étant $= \sqrt{(x - X')^2 + y^2 + Z'^2}$. Pour que la dernière équation soit satisfaite, il faut qu'on ait $y = 0$: ainsi la route la plus courte est $M'N' + N'M''$, c'est-à-dire, qu'elle

est toute entière dans un plan passant par les deux points donnés, et perpendiculaire à celui par lequel on doit passer, et alors l'avant-dernière équation se réduit à

$$\frac{x-X}{\sqrt{(x-X)^2+Z^2}}=\frac{X'-x}{\sqrt{(X'-x)^2+Z'^2}};$$

or

$$\frac{x-X}{\sqrt{(x-X)^2+Z^2}}=\cos M'N'A,$$

et

$$\frac{X'-x}{\sqrt{(X'-x)^2+Z'^2}}=\cos M''N'X;$$

donc les deux droites $M'N'$, $N'M''$ font le même angle avec le plan xy, ou avec la perpendiculaire $N'R$ à ce plan.

Ainsi la plus courte distance d'un point à un autre, en passant par une surface courbe, est une ligne brisée située dans un plan normal à cette surface courbe, et passant par les deux points.

La solution du problème suivant est due à M. *Puissant*, qui l'a donnée dans son excellent ouvrage ayant pour titre: *Recueil de diverses propositions de Géométrie*, etc.

3°. *Déterminer la plus courte distance de deux points mobiles dont on connaît les positions initiales, et qui se meuvent uniformément sur deux droites données de position dans l'espace.*

Fig. 50. Prenons pour plan des xy un plan qui contienne l'une des droites données, et qui soit, en même tems, parallèle à l'autre, et pour plan des xz celui qui passe par cette autre droite, et qui soit en outre perpendiculaire au plan des xy. Soient maintenant MM', mm' les droites données dont la seconde est parallèle à l'axe AX.

L'origine des coordonnées étant en A, les équations de MM' sont

$$y = -x \text{ tang } \varphi. + b, \quad z = 0,$$

φ étant l'angle MKA, et b désignant AO; celles de la droite mm', sont

$$y = 0, \quad z = Z,$$

$Z = Am$ étant l'ordonnée constante de tous les points de la droite mm'. Supposons que les points mobiles se trouvant actuellement, l'un en M dont les coordonnées connues sont α et β, et l'autre en m sur l'axe des z, se meuvent de M vers K, et de m vers m', avec des vitesses uniformes dans le rapport de q à p. Alors si $M'm'$ est la plus courte distance à laquelle se trouveront ces mobiles, que les coordonnées du point M' soient α', β', et que celles du point m' soient X et Z : on aura, en général,

$$M'm' = u = \sqrt{(X - \alpha')^2 + \beta'^2 + Z^2}.$$

Mais les espaces parcourus MM' mm', étant entre eux comme les vitesses q et p, on a $MM' = \frac{qX}{p}$, en observant que la longueur $mm' = X$; or l'angle formé par la droite MM' avec l'axe des x, étant φ, on a

$$AP' = AP + PP' = AP + pM' = AP + MM' \cos\varphi,$$
$$M'P' = MP - pM = MP - MM' \sin\varphi;$$

c'est-à-dire, en désignant par α et β les coordonnées connues du point M,

$$\alpha' = \alpha + \frac{qX}{p} \cos\varphi, \quad \beta' = \beta - \frac{qX}{p} \sin\varphi.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans u, et qu'on égale à zéro la différentielle de cette expression prise par rapport à X, en observant que l'ordonnée Z est constante, on obtiendra

une équation de laquelle on tirera

$$X = \frac{\alpha(p^2 - pq\cos\varphi) + \beta pq\sin\varphi}{p^2 + q^2 - 2pq\cos\varphi},$$

ou bien

$$X = \frac{p}{r} \times \frac{\alpha(p - q\cos\varphi) + \beta q\sin\varphi}{r},$$

en posant, pour abréger, $r^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos\varphi$.

Cette valeur de X reportée dans les expressions de α' et $\mathcal{C}'$, fera connaître la seconde extrémité M' de la plus courte distance.

La valeur de r peut être construite très-simplement; car, elle représente la base d'un triangle dont les deux autres côtés formant l'angle φ, sont p et q. Si donc, par un point quelconque G de la droite MM', on mène GF parallèle à mm', et que l'on prenne GF de manière que MG et GF soient dans le rapport de q à p, la ligne MF sera la valeur de r. Il suit de là qu'en prolongeant MF, et faisant

$$MR = \frac{\alpha(p - q\cos\varphi) + \beta q\sin\varphi}{r},$$

la droite RM', menée parallèlement à FG, sera X; et il est remarquable que la droite mR sera perpendiculaire à MF, et égale à la plus courte distance cherchée. Or si cette circonstance a lieu, il faut que la droite AR qui est la projection horisontale de mR, soit elle-même perpendiculaire à MF, propriété qu'il est facile de prouver. En effet

$$\sin D = \frac{q\sin\varphi}{r}, \quad \cos D = \frac{p - q\cos\varphi}{r},$$

en tenant compte de la valeur de r^2; par suite

$$DP = \frac{\beta(p - q\cos\varphi)}{q\sin\varphi}, \quad DM = \frac{\beta r}{q\sin\varphi}, \quad AD = DP - \alpha,$$

et si AR n'est pas perpendiculaire à DM, soit Ar cette perpendiculaire : on trouvera que

$$Dr = \left(\frac{\beta(p-q\cos\varphi)}{q\sin\varphi} - \alpha\right)\left(\frac{p-q\cos\varphi}{r}\right);$$

et ensuite, on aura

$$Mr = MD - Dr = \frac{\alpha(p-q\cos\varphi)+\beta q\sin\varphi}{r},$$

donc $MR = Mr$: donc AR et mR sont réellement perpendiculaires à MD.

Au surplus, ajoute M. *Puissant*, on reconnaît sur-le-champ cette vérité, parce qu'en général mF mesure la distance des deux mobiles : en effet, lorsque le premier M est arrivé en G, le second M a parcouru, sur mm', un espace $mg = GF$; la figure $mFGg$ est donc un parallélogramme, et puisque de toutes les droites mF menées du point m à la droite MD, la plus courte est la perpendiculaire AR, celle-ci est nécessairement la plus courte distance cherchée.

Par le choix qu'on a fait des plans coordonnés, cette question est ramenée à la recherche du *minimum* d'une expression d'une seule variable.

La recherche des équations de la normale, en un point x, y, z d'une surface courbe, revient à celle de la plus courte ligne qu'on puisse mener d'un point de l'espace à la surface. Or la distance du point p, q, s de l'espace au point x, y, z de la surface, est

$$\sqrt{(p-x)^2+(q-y)^2+(s-z)^2} = u,$$

et si l'on différentie cette expression, d'abord suivant x, puis suivant y, et qu'on égale les coefficiens à zéro, on obtiendra ces deux équations des projections de la normale, savoir :

$$p - x + (s - z)\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$q - y + (s - z)\frac{dz}{dy} = 0,$$

trouvées (pag. 363), et on s'assurera qu'elles satisfont à la condition du *minimum*.

Considérons une fonction d'un nombre quelconque de variables, et soit

$$u = f(x, y, z, t, \text{etc.}):$$

si on suppose que les variables indépendantes x, y, z, etc. aient déja les valeurs qui conviennent soit au *maximum*, soit au *minimum*, il faudra qu'en écrivant $x \pm i$ pour i, $y \pm k$ pour y, $z \pm h$ pour z, $t \pm l$ pour t, etc., la fonction variée soit toujours plus petite dans le cas du *maximum*, et toujours plus grande dans le cas du *minimum* que la fonction donnée, quelque petits que soient les accroissemens i, k, h, l, etc.

Le développement de la fonction variée, sera

$$\begin{array}{l} f(x, y, z, t, \text{etc.}) \\ \pm Ai \pm Bk \pm Ch \pm Dl \pm \text{etc}, \\ + A'i^2 + B'ik + C'ih + \text{etc}, \\ \pm A''i^3 \pm B''i^2k \pm C''i^2h \pm \text{etc}. \end{array}$$

Donc il faudra qu'on ait pour le *maximum*

$$f(x \pm i, y \pm k, \text{etc.}) - f(x, y, \text{etc.}) < 0,$$

et pour le *minimum*

$$f(x \pm i, y \pm k, \text{etc.}) - f(x, y, \text{etc.}) > 0;$$

or, comme ces conditions doivent avoir lieu pour des valeurs

de i, k, l, etc., aussi petites qu'on voudra, il est nécessaire que la ligne des premières puissances des accroissemens, disparaisse; c'est ce dont on se rendra facilement raison, en observant qu'on peut prendre les accroissemens égaux entre eux, et conséquemment supposer chacun d'eux égal à i, en sorte que par une très-petite valeur de i, la première ligne donnera son signe au développement: elle doit donc être nulle, et, à cause de l'indépendance des variables, il faut qu'on ait séparément

$$A=0, \quad B=0, \quad C=0, \quad D=0, \text{ etc.},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{du}{dx}=0, \quad \frac{du}{dy}=0, \quad \frac{du}{dz}=0, \quad \frac{du}{dt}=0, \text{ etc.}$$

En effet, en ne considérant d'abord qu'une fonction de trois variables

$$u=f(x,y,z),$$

si on suppose qu'on connaisse déja les valeurs de x et y propres au *maximum* ou au *minimum*, on aura pour l'un et l'autre cas, la condition

$$\frac{du}{dz}=0,$$

d'où on déduira z en fonction des deux autres variables x et y; et imaginant qu'on ait remplacé z par cette fonction, les deux conditions

$$\frac{du}{dx}=0, \quad \frac{du}{dy}=0;$$

relatives à l'existence d'un *maximum* ou d'un *minimum* dans le cas des fonction de deux variables, devront se traduire

ainsi :

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\frac{du}{dy}+\frac{du}{dy}\cdot\frac{dz}{dy}=0,$$

dont la première est la différentielle d'une fonction de deux variables x et z, z étant fonction de x, et la seconde la différentielle d'une fonction de deux variables y et z, z étant fonction de y : or à cause de $\frac{du}{dz}=0$, ces deux conditions se réduisent à celles-ci

$$\frac{du}{dx}=0,\quad \frac{du}{dy}=0.$$

On étendrait de proche en proche cette analyse à une fonction d'un nombre quelconque de variables, et on serait ramené aux conditions énoncées plus haut.

Il y a, en particulier, *minimum* ou *maximum*, selon que la somme

$$A'i^2+B'ik+C'ih+\text{etc.}$$

est positive ou négative, ce qui est analogue à ce qu'on a démontré (pag. 269) à l'égard des fonctions d'une seule variable. Mais la difficulté consiste ici à assigner les conditions générales qui rendent une telle quantité positive ou négative. Soit, à cet effet,

$$V=Ki^2+Li+M;$$

où $K=A'$, L désigne la somme des coefficiens de i, et M celle de tous les termes sans i ; la fonction V pourra être mise sous la forme

$$V = K\left\{\left(i + \frac{L}{2K}\right)^2 + \frac{M}{K} - \frac{L^2}{4K^2}\right\}$$
$$= K\left\{\left(i + \frac{L}{2K}\right)^2 + V'\right\},$$

en posant $V' = \frac{M}{K} - \frac{L^2}{4K^2}$.

Or V' renfermant tous les produits de deux dimensions des accroissemens, à l'exception de i, si on rassemble les termes de k^2, k, dont on désignera les coefficiens par K' et L', et qu'on représente par M' la somme des autres termes qui ne contiendront plus i et k, on aura

$$V' = K'k^2 + L'k + M',$$

qu'on pourra mettre aussi sous cette forme

$$V' = K'\left\{\left(k + \frac{L'}{2K'}\right)^2 + \frac{M'}{K'} - \frac{L'^2}{4K'^2}\right\},$$
$$= K'\left\{\left(k + \frac{L'}{2K'}\right)^2 + V''\right\},$$

en posant $V'' = \frac{M'}{K'} - \frac{L'^2}{2K'^2}$. En ordonnant de même V'' par rapport aux puissances de h, et notant les coefficiens par L'', K'', et par M'' la somme des autres termes qui ne contiendront plus i, k et h, on aura

$$V'' = K''\left\{\left(h + \frac{L''}{2K''}\right)^2 + V'''\right\},$$

V''' désignant $\frac{M''}{K''} - \frac{L''^2}{4K''^2}$. Ainsi n étant le nombre des variables, $V^{(n-1)}$ ne renfermera plus qu'un seul accroissement, et terminera la série de V, V'....

Maintenant posons le cas de *u minimum* : il faut alors que la quantité V soit toujours positive, ce qui se réduit à dire

que chacune des quantités K, $\frac{M}{K}-\frac{L^2}{4K^2}$ doit être positive ; car le carré $\left(i+\frac{L}{2K}\right)^2$ est essentiellement positif : on doit donc avoir

$$K>0,\ \text{et}\ \frac{M}{K}-\frac{L^2}{4K^2}>0,$$

et on peut observer que ces conditions sont précisément celles qui rendent imaginaires les racines de l'équation

$$Ki^2+Li+M=0.$$

Mais la quantité $\frac{M}{K}-\frac{L^2}{4K^2}$, ou son égale V' ne peut devenir positive, à moins qu'on ait, en même tems,

$$K'>0,\ \text{et}\ \frac{M'}{K'}-\frac{L'^2}{4K'^2}>0,$$

conditions qui rendent imaginaires les racines de

$$K'k^2+L'k+M'=0.$$

On trouvera encore que pour rendre la quantité $\frac{M'}{K'}-\frac{L'^2}{4K'^2}$, ou son égale V'' positive, il faut qu'on ait

$$K''>0,\ \text{et}\ \frac{M''}{K''}-\frac{L''^2}{4K''^2}>0,$$

ou que les racines de

$$K''h^2+L''h+M''=0,$$

soient imaginaires ; et ainsi de suite.

Si la fonction devait être un *maximum*, il faudrait que

la quantité V fût négative ; c'est-à-dire, qu'on eût

$$K<0, \quad \text{et } \frac{M}{K}-\frac{L^2}{4K^2}>0, \quad \text{ou } V'>0 :$$

ainsi ce cas ne diffère du précédent que par le signe de la seule quantité K.

Si dans la première énonciation de la valeur de V, qui contient V', on substitue celle de V' qui contient V'', dans celle-ci la valeur de V'' en V''', et ainsi de suite, on aura

$$V=K\left(i+\frac{L}{2K}\right)^2+KK'\left(k+\frac{L'}{2K'}\right)^2 \\ +KK'K''\left(h+\frac{L''}{2K''}\right)^2+\text{etc.},$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$V=a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+\text{etc.}$$

Dans le cas du *minimum*, les coefficiens K, K', K'', etc., et conséquemment ceux-ci a, b, c, etc. sont positifs ; dans celui du *maximum*, la seule quantité K est négative, en sorte que les coefficiens a, b, c, etc., sont négatifs.

Si les termes du second ordre étaient nuls, il faudrait, pour l'existence soit du *minimum*, soit du *maximum*, que ceux du troisième ordre fussent nuls aussi, et que la collection des termes du quatrième ordre fût positive dans le premier cas, et négative dans le second : il faudrait donc chercher les conditions qui rendraient positif ou négatif un polynome tel que

$$A'''i^4+B'''ki^3+\text{ etc.};$$

mais l'application de la méthode générale à ce cas, serait sujette à des difficultés de calcul qui pourraient la rendre impraticable; et c'est là, dit M. *Lagrange*, dans les *Fonctions analytiques*,

un problême dont il serait à desirer qu'on pût avoir une solution complette.

Lorsque la fonction proposée ne renferme que les deux variables x et y, les termes de deux dimensions par rapport aux accroissemens, se réduisent à

$$V = A'i^2 + B'ik + C'k^2.$$

On a donc, dans cette hypothèse, $M = C'k^2$, $L^2 = B'^2k^2$, $K = A'$, et conséquemment

$$V' = \left(\frac{C'}{A'} - \frac{B'^2}{4A'^2}\right)k^2,\ L' = 0,\ M' = 0, \text{ etc.}$$

Ainsi les conditions correspondantes au *minimum*, sont

$$A' > 0,\quad \frac{C'}{A'} - \frac{B'^2}{4A'^2} > 0,\quad \text{d'où}\quad 4A'C' - B'^2 > 0,$$

dont la seconde ne peut avoir lieu, à moins qu'on ait aussi $C' > 0$. Ces conditions traduites en coefficiens différentiels, deviennent

$$\frac{d^2u}{dx^2} > 0,\quad \frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{d^2u}{d^2y} - \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2 > 0,\quad \frac{d^2u}{d^2y} > 0.$$

On trouverait pour conditions du *maximum*,

$$\frac{d^2u}{dx^2} < 0,\quad \frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2 > 0,\quad \frac{d^2u}{dy^2} < 0.$$

Telles sont, en effet, les conclusions auxquelles nous sommes arrivés (pag. 404).

On pourra s'exercer à rechercher si la fonction

$$u = ax^2 - bxy + czx + yz$$

admet une plus grande ou une plus petite valeur.

Nous avons supposé jusqu'ici que les variables qui entraient dans la fonction

$$u = f(x, y, z),$$

étaient toutes indépendantes ; mais il peut arriver qu'il y ait entre elles une ou plusieurs relations données ; alors il faut commencer par éliminer de la fonction proposée, au moyen de ces équations de condition, le même nombre de variables, puis chercher, par rapport aux variables qui restent, les conditions du *maximum* et du *minimum*. On observera que si la fonction proposée contient un nombre m de variables, le nombre des équations de condition ne peut excéder $m-1$; mais il peut être moindre.

Faisons une application à cette question.

Parmi tous les parallélipipèdes rectangles qui ont même volume, trouver celui dont la surface totale est un minimum.

Soient x, y, z, les trois arêtes d'un même angle solide du parallélipipède rectangle cherché, et a^3 sa solidité : on aura

$$2xy + 2xz + 2yz = u = minimum,$$

et pour équation de condition,

$$xyz = a^3.$$

Nous déduirons de celle-ci

$$z = \frac{a^3}{xy},$$

dont la substitution dans u donnera

$$u = 2xy + \frac{2a^3}{y} + \frac{2a^3}{x};$$

mais à raison des deux conditions

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0,$$

on aura

$$2y - \frac{2a^3}{x^2} = 0, \quad 2x - \frac{2a^3}{y^2} = 0;$$

d'où on conclut

$$y = x = a,$$

et conséquemment

$$z = a.$$

Maintenant, il s'agit de vérifier si la substitution de ces valeurs en place de x, y, z dans u, rend cette fonction *maximum* ou *minimum*. On doit avoir, en même tems, dans ce dernier cas,

$$\frac{d^2u}{dx^2} > 0, \quad \frac{d^2u}{dy^2} > 0, \quad \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2 > 0.$$

Or, dans notre exemple,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = + \frac{4a^3}{x^3} = +4, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = + \frac{4a^3}{y^3} = +4, \quad \frac{d^2u}{dx\,dy} = 2;$$

donc la dernière relation est satisfaite, puisqu'elle devient, par ces substitutions,

$$\frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2 = 16 - 4 > 0.$$

Nous proposerons encore comme applications de la méthode ces deux questions :

2°. *Parmi tous les cônes droits de même solidité, déterminer celui dont la surface totale est un* minimum,

2°. *Parmi tous les cônes droits de même surface, assigner celui qui a le* maximum *ou le* minimum *de solidité.*

Nous indiquerons ici une abréviation de calcul qu'il est bon d'employer dans le cas où on a des équations de condition,

Soit une fonction

$$u = f(x, y, z, t),$$

qui doit devenir un *maximum* ou un *minimum*, et soient, en même tems, ces deux équations de condition,

$$(P) \ldots\ldots \varphi(x, y, z, t) = 0, \quad \psi(x, y, z, t) = 0 \ldots\ldots (Q)$$

on obtient, par la différentiation,

$$(1) \ldots\ldots \mathrm{d}u = X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z + T\,\mathrm{d}t,$$
$$(2) \ldots\ldots 0 = (X)\,\mathrm{d}x + (Y)\,\mathrm{d}y + (Z)\,\mathrm{d}z + (T)\,\mathrm{d}t,$$
$$(3) \ldots\ldots 0 = [X]\,\mathrm{d}x + [Y]\,\mathrm{d}y + [Z]\,\mathrm{d}z + [T]\,\mathrm{d}t,$$

$X, Y \ldots (X), (Y) \ldots [X], [Y] \ldots$ désignant des coefficiens différentiels. Si des équations (2) et (3), on tire dz et dt pour les substituer dans (1), on aura, après les réductions,

$$\mathrm{d}u = M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y,$$

M et N étant des fonctions de x, y, z. Mais les conditions

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 0,$$

deviennent, dans ces cas,

$$(R) \ldots\ldots M = 0, \quad N = 0 \ldots\ldots (S)$$

On a donc les quatre équations (P), (Q), (R), (S) pour déterminer les inconnues x, y, z et t, dont les valeurs substituées dans la proposée, en font un *maximum* ou un *minimum*, et on reconnait ensuite, à l'aide des caractères donnés, s'il y a *maximum* ou *minimum*.

On rencontre aussi dans les fonctions de deux ou de plusieurs variables des *maxima* et des *minima*, pour lesquels les coefficiens différentiels prennent des valeurs infinies, comme

on l'a vu (pag. 279, 280) à l'égard des fonctions d'une seule variable. Soit, par exemple,

$$u = b - (x^2 + y)^{\frac{3}{2}}:$$

pour toutes les valeurs données aux variables indépendantes x et y; on obtiendra pour u des valeurs plus petites que celles qui résultent de la supposition $x = 0$, $y = 0$, pour laquelle $u = b$: cette dernière valeur de u est donc un véritable *maximum* : cependant les coefficiens différentiels

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2x}{3(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}; \quad \frac{du}{dy} = -\frac{2y}{3(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}},$$

deviennent $\frac{0}{0}$ pour $x = 0$, $y = 0$. Dans d'autres cas, les coefficiens différentiels deviendraient nuls ou infinis. Dans cet exemple, les substitutions $0 + i$ pour x et $0 + k$ pour y, donnant

$$u' - u = -(i^2 + k^2)^{\frac{1}{3}},$$

et cette quantité conservant le même signe, quelque petits que soient les accroissemens i et k, on conclut que pour $x = 0$, $y = 0$, la fonction proposée est un *maximum*. En général, $x = a$, $y = b$, $z = c$, étant des valeurs qui mettent le développement en défaut, si ces valeurs doivent correspondre à un *maximum* ou à un *minimum* de la fonction u, il faut qu'après les substitutions $x = a \pm i$, $y = b \pm k$, $z = c \pm h$, etc., la fonction u' soit toujours moindre ou toujours plus grande que u, quelque petits que soient les accroissemens i, k, h, etc.

NOTES.

SUR LE CHAPITRE II.

M. POISSON a donné, dans le troisième numéro de la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, une démonstration du théorème de *Taylor*, que nous allons rapporter.

Soit fx une fonction quelconque de x; je substitue $x+i$ à la place de x, le premier terme du développement sera évidemment fx, et le développement entier pourra être représenté par

$$f(x+i)=fx+Pi^a+Qi^b+Ri^c+Si^e+\text{etc.}\ldots\ldots(M)$$

a, b, c, e, etc., étant une suite croissante d'exposans indéterminés, et P, Q, R, S, etc., étant des fonctions de x, dont la forme dépend de la fonction proposée fx.

Nous prouverons d'abord que l'exposant a est nécessairement égal à l'unité. En effet, mettons dans le développement, $2i$ à la place de i, et nous aurons

$$f(x+2i)=fx+2^aPi^a+2^bQi^b+2^cRi^c+\text{etc.}$$

Si, dans le même développement, nous changeons x en $x+i$, nous aurons un second développement de $f(x+i)$, lequel, en se bornant aux deux premiers termes, sera

$$f(x+2i)=fx+2Pi^a+\text{etc.}$$

Ces deux développemens devant être identiques, il faudra que le coefficient de i^a dans l'un soit égal au coefficient de i^a dans l'autre, c'est-à-dire, qu'on ait

$$2P=2^aP,\quad \text{d'où}\quad a=1.$$

Cette conclusion a lieu quelle que soit la fonction désignée par fx : si, par exemple, cette fonction était x^m, on aurait

$$(x+i)^m = x^m + Pi + \text{etc.};$$

mais, dans ce cas, P serait de la forme Ax^{m-1}, A étant un nombre dont la valeur dépend de celle de l'exposant m; car si l'on divise par x^m, et qu'on fasse $\frac{i}{x} = y$, on aura

$$(1+y)^m = 1 + \frac{P}{x^{m-1}} y + \text{etc.};$$

et comme la fonction non développée ne renferme plus la variable x, le développement ordonné suivant y, ne doit renfermer x dans aucun de ses termes; donc P doit être de la forme Ax^{m-1}. On est donc assuré que les deux premiers termes du développement de $(x+i)^m$ sont

$$(x+i)^m = x^m + Ax^{m-1}i + \text{etc.} \ldots . (N)$$

et de plus, on sait que, pour m un nombre entier positif, $A = m$. Cette remarque servira dans la suite de la démonstration.

Il faut maintenant déterminer les autres exposans b, c, e, etc., et assigner la loi suivant laquelle les fonctions P, Q, R, S, etc., se déduisent les unes des autres.

A cet effet, supposons que dans l'identité (M) qui doit avoir lieu pour toutes les valeurs de x, cette variable devienne $x+h$; et représentons par p, q, r, etc., ce que deviennent alors les fonctions P, Q, R, S, etc., en sorte que l'identité (M) devient

$$f(x+i+h) = f(x+h) + pi + qi^b + ri^c + si^e + \text{etc.}$$

comme elle a aussi lieu pour toutes les valeurs de i, on peut supposer que i s'y change en $i+h$, ce qui donne un second développement de $f(x+i+h)$, savoir :

$$f(x+i+h) = fx + P(i+h) + Q(i+h)^b + R(i+h)^c + S(i+h)^e + \text{etc.}$$

Ces deux développemens de $f(x+i+h)$ devant être identiques, si on les ordonne tous deux par rapport aux puissances de h, il faudra 1°. que la somme des termes indépendans de h, dans le premier développement,

soit égale à la somme des termes indépendans de h dans le second développement; 2°. que la somme des termes multipliés par h dans le premier développement, soit égale à la somme des termes multipliés par h dans le second, et qu'il en soit de même des coefficiens des mêmes puissances de h. La considération des termes multipliés par h, suffit pour déterminer les exposans b, c, e, etc.

Il est facile d'ordonner les deux développemens de $f(x+i+h)$, en se bornant aux deux premiers termes. D'abord, dans le premier, on a

$$f(x+h) = fx + Ph + \text{etc.},$$

puisqu'il ne faut que changer i en h dans (M). De plus, on peut supposer

$$p = P + P'h + \text{etc.},\ q = Q + Q'h + \text{etc.},\ r = R + R'h + \text{etc.},$$
$$s = S + S'h + \text{etc.},$$

puisque p, q, r, s, t, etc., sont des fonctions de $x+h$, dont les fonctions primitives sont P, Q, R, S, T, etc.; alors le premier développement prend cette forme

$$\begin{aligned} f(x+i+h) = {} & fx + Pi + Qi^b + Ri^c + Si^e + \text{etc.} \\ & + h(P + P'i + Q'i^b + R'i^c + S'i^e + \text{etc.}) \end{aligned}$$

Pour ordonner de même le second développement, suivant les puissances de h, il ne s'agit que de développer les puissances de $(i+h)^b$, $(i+h)^c$, etc., en se bornant aux deux premiers termes, les seuls nécessaires pour l'objet qu'on a en vue. Or, en vertu de l'identité (N), on a

$$(i+h)^b = i^b + Bi^{b-1}h + \text{etc.},\quad (i+h)^c = i^c + Ci^{c-1}h + \text{etc.},$$
$$(i+h)^e = i^e + Ei^{e-1}h + \text{etc.},$$

B, C, E, etc., étant des nombres qui seront déterminés quand les exposans b, c, e, etc., seront connus. Le second développement de $f(x+i+h)$ deviendra donc

$$\begin{aligned} f(x+i+h) = {} & fx + Pi + Qi^b + Ri^c + Si^e + \text{etc.} \\ & + h(P + BQi^{b-1} + CRi^{c-1} + ESi^{e-1} + \text{etc.}) \end{aligned}$$

Egalant entre eux les facteurs de h, et supprimant le premier terme P de

part et d'autre, on aura

$$(O)\ldots P'i+Q'i^b+R'i^c+S'i^e+\text{etc.}=BQi^{b-1}+CRi^{c-1}+ESi^{e-1}+\text{etc.}$$

Or, cette égalité devant avoir lieu pour toutes les valeurs de i, il faut qu'on ait, 1°.

$$b-1=1,\quad c-1=b,\quad e-1=c,\quad \text{etc.},$$

ou bien

$$b=2,\quad c=3,\quad e=4,\quad f=5,\quad \text{etc.},$$

et conséquemment, en observant que B, C, E, etc., sont les coefficiens numériques des seconds termes des développemens $(i+h)^2$, $(i+h)^3$, $(i+h)^4$, etc.,

$$B=2,\quad C=3,\quad E=4,\quad F=5,\quad \text{etc.};$$

et 2°.

$$P'=2Q,\quad Q'=3R,\quad R'=4S,\quad S'=5T,\quad \text{etc.},$$

d'où

$$Q=\frac{P'}{2},\quad R=\frac{Q'}{3},\quad S=\frac{R'}{4},\quad T=\frac{S'}{5},\quad \text{etc.}$$

La première condition est nécessaire pour que les deux membres de l'équation (O) soient composés de termes semblables qui puissent se détruire, et réciproquement, la seconde condition exprime que ces termes semblables se détruisent en effet. On remarquera qu'on aurait pu poser, par exemple, $Q'i^b=ESi^{e-1}$, parce qu'on aurait eu d'abord $e-1=b$, d'où $e=3$; ensuite, à cause de $E=3$, on aurait trouvé $S=\frac{Q'}{3}$, en sorte que le terme Si^e aurait pris la place de Ri^c.

On voit donc que de la même manière que P dérive de fx, Q dérive de P, puisque Q est aussi le coefficient de la première puissance de l'accroissement dans le développement de P, après la substitution de x plus son accroissement, substitution qui change P en p. On voit que R dérive de la même manière que Q, et ainsi de chacun des autres coefficiens.

On a donc, d'après les notations convenues dans le texte,

$$P=\frac{dy}{dx},\quad P'=\frac{dP}{dx},\quad Q'=\frac{dQ}{dx},\quad R'=\frac{dR}{dx},\quad \text{etc.},$$

et conséquemment

$$Q=\tfrac{1}{2}\frac{dP}{dx},\quad R=\tfrac{1}{3}\frac{dQ}{dx}=\frac{1}{2.3}\frac{d\left(\frac{dP}{dx}\right)}{dx}=\frac{1}{2.3}\frac{d^2P}{dx^2}=\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3},$$

$$S=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{dR}{dx}=\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3P}{dx^3}=\frac{1}{1.2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4},$$

$$T=\frac{1}{1.2.3.4.5}\frac{d^4P}{dx^4}=\frac{1}{1\ldots5}\frac{d^5y}{dx^5}\ \text{etc.},$$

en sorte qu'on retrouve

$$f(x+i)=y+\frac{dy}{dx}i+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{i^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{i^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$



SUR LE CHAPITRE IV (*pag.* 40).

Nous donnerons, d'après M. *Lagrange* (*Calcul des fonctions*), une autre détermination du coefficient indéterminé A qui entre dans le développement

$$\sin x=Ax-\frac{A^3x^3}{2.3}+\frac{A^5x^5}{2.3.4.5}+\text{etc.}$$

Cette série sera nécessairement convergente, en prenant l'angle x tel que Ax soit égal ou moindre que l'unité, et on aura, en même tems,

$$\sin x<Ax\quad\text{et}\quad>Ax-\frac{A^3x^3}{2.3}.$$

D'un autre côté, il est démontré rigoureusement par les théorêmes d'*Archimède* (*), que le sinus est toujours moindre que l'arc, et que la tangente est plus grande que l'arc, du moins dans le premier quart de cercle; ainsi on aura

$$\sin x<x,\quad\frac{\sin x}{\cos x}>x,$$

(*) Voy. la *Trigonométrie* de Legendre, pag. 3;3.

mais $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, donc

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} > x, \text{ d'où } \sin^2 x > x^2 (1 - \sin^2 x) \text{ et } \sin x > \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Ainsi, on aura, par la nature du cercle,

$$\sin x < x \quad \text{et} \quad \sin x > \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Si donc on prend l'angle x moindre qu'un droit et assez petit pour que Ax soit moindre que l'unité, on aura nécessairement

$$1^\circ \ldots\ldots\ \sin x < Ax, \quad \sin x > \frac{x}{\sqrt{1+xx}},$$

et, par conséquent,

$$Ax > \frac{x}{\sqrt{1+xx}}, \quad \text{d'où} \quad A > \frac{1}{\sqrt{1+xx}};$$

$$2^\circ \ldots\ldots\ \sin x > Ax - \frac{A^3 x^3}{2.3} \quad \text{et} \quad \sin x < x,$$

par conséquent,

$$Ax - \frac{A^3 x^3}{2.3} < x, \quad \text{d'où} \quad A - \frac{A^3 x^2}{2.3} < 1 \quad \text{et} \quad A < 1 + \frac{A^3 x^2}{2.3}.$$

Comme ces deux conditions doivent avoir lieu quelque petit que soit x, il résulte de la première que A ne peut être moindre que 1; car si on avait $A < 1$, on aurait $\frac{1}{A} > 1$; or, la condition

$$A > \frac{1}{\sqrt{1+xx}} \quad \text{donne} \quad \frac{1}{A} < \sqrt{1+xx},$$

donc, de quelque petite quantité que $\frac{1}{A}$ surpassât l'unité, il serait toujours possible de prendre x assez petit pour que $\sqrt{1 + xx}$ fût $< \frac{1}{A}$, tandis que $\sqrt{1 + xx}$ doit être, au contraire, $> \frac{1}{A}$.

Il résulte ensuite de la seconde condition que A ne peut pas être plus grand que l'unité; car quelque petit que fût l'excès de A sur l'unité, il serait toujours possible de prendre x assez petit pour que l'on eût

$$A > 1 + \frac{A^3 x^2}{2.3},$$

tandis qu'au contraire, on doit toujours avoir $A < 1 + \frac{A^3 x^2}{2.3}$.

Donc, puisque la valeur de A ne peut être ni moindre ni plus grande que l'unité, et puisque d'ailleurs A est un nombre, on aura nécessairement $A = 1$. On remarquera que cette conclusion suppose l'arc x entre zéro et un quart de cercle, tandis que, dans le texte, nous considérions des multiples quelconques de l'arc x, et alors la valeur $A = 1$ correspond à l'arc simple x. On pourrait démontrer d'une manière analogue que le coefficient A, dans la série du cosinus (pag. 50), est $= 1$.



SUR LE CHAPITRE IV. (*pag.* 49).

Nous avons promis de démontrer que quel que fût l'exposant d'un binome, le coefficient numérique du second terme du développement, était égal à cet exposant. On a $(x+i)^m = x^m\left(1+\frac{i}{x}\right)^m = x^m(1+y)^m$, en faisant $\frac{i}{x} =$ en sorte qu'il suffit de démontrer la proposition à l'égard de $(1+y)^m$. On peut supposer

$$(1+y)^m = 1 + Py,$$

Py représentant le reste du développement, et P une fonction de nombres et de y, qui ne devient pas infinie pour $y = 0$. Si l'on désigne par A ce que devient P pour $y = 0$, et par Ry la partie de P qui devient nulle dans la même hypothèse, on aura

$$(1+y)^m = 1 + (A + Ry)y = 1 + Ay + \text{etc.},$$

où A ne contient plus y, et ne peut être qu'une fonction de m et de

nombres, comme on l'a d'ailleurs vu (pag. 424). Il s'agit donc de déterminer A : soit, à cet effet,

$$A = fm,$$

et on aura

$$(1+y)^m = 1 + y \cdot fm + \text{etc.} \ldots \ldots (1)$$

mais on aurait pareillement

$$(1+y)^n = 1 + y \cdot fn + \text{etc.} \ldots \ldots (2)$$

Multipliant l'une par l'autre ces deux identités, et arrêtant le développement au terme de première puissance de y, on trouvera

$$(1+y)^{m+n} = 1 + (fm + fn)\,y + \text{etc.} \ldots \ldots (3)$$

Mais en changeant m en $m+n$ dans (1), ou n en $m+n$ dans (2), on a

$$(1+y)^{m+n} = 1 + f(m+n)\,y + \text{etc.} \ldots (4)$$

Des développemens (3) et (4) qui appartiennent à la même fonction, on conclut

$$fm + fn = f(m+n) \ldots \ldots (5)$$

Si l'on écrit $m+i$ pour m et $n-i$ pour n, (5) deviendra

$$f(m+i) + f(n-i) = f(m+n);$$

donc les fonctions fm et fn sont telles que leur somme ne varie pas par ces hypothèses. Cette propriété sert à faire connaître la nature de ces fonctions, et on s'apperçoit aisément qu'on ne peut que supposer

$$fm = am + c,$$
$$fn = an + c,$$

c'est-à-dire, que fm et fn ne peuvent être que linéaires en m et n. Il reste à déterminer les coefficiens a et c. Or, de

$$(1+y)^m = 1 + (am+c)\,y + \text{etc.},$$

on déduit, pour $m = 0$,

$$1 = 1 + cy + \text{etc.}, \quad \text{d'où} \quad 0 = cy + \text{etc.},$$

et comme le développement procède suivant les puissances de y, on conclut $e = 0$, et conséquemment

$$(1 + y)^m = 1 + amy + \text{etc.} :$$

d'ailleurs, pour $m = 1$, on a

$$1 + y = 1 + ay + \text{etc.},$$

donc $a = 1$. Donc enfin,

$$(1 + y)^m = 1 + my + \text{etc.}$$

Cette démonstration est due à M. Poisson.



SUR LES CHAPITRES XI ET XIV.

Des limites de la série de Taylor.

COMME le théorème des limites de la théorie de *Taylor*, qui fait le sujet des chapitres cités, sert de fondement aux applications du calcul différentiel, nous allons en donner une nouvelle démonstration que nous avons tirée du grand *Traité de Calcul différentiel* de M. *Lacroix*, qui a paru au moment où on imprimait ces notes.

Nous observerons d'abord que ces limites se découvriraient très-aisément, si tous les termes de la série de *Taylor* avaient le même signe.

En effet, la série de *Taylor* considérée dans le cas d'une fonction d'une seule variable x, que nous désignerons par u, et prise à partir du terme de l'ordre $n + 1$, étant

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} \cdot \frac{i^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} + \frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}} \cdot \frac{i^{n+2}}{1.2.3\ldots(n+2)} + \frac{d^{n+3}u}{dx^{n+3}} \cdot \frac{i^{n+3}}{1.2.3\ldots(n+3)}, \text{etc.}$$

revient à

$$\frac{i^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} \left\{ \frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} + \frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}} \cdot \frac{i}{n+2} + \frac{d^{n+3}u}{dx^{n+3}} \cdot \frac{i}{n+3} + \text{etc.} \right\}$$

et on voit que, dans l'hypothèse actuelle, la somme de la suite entre les accolades, surpasse son premier terme. Si l'on représente par $\frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}}$ ce que devient $\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}$, lorsqu'on y change x en $x+i$, on sait que

$$\frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}} = \frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} + \frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}\frac{i}{1} + \frac{d^{n+3}u}{dx^{n+3}}\frac{i^2}{1.2} + \text{etc.},$$

développement dont chaque terme, à partir du second, est évidemment plus grand que celui qui lui correspond dans la série entre les accolades, puisque les diviseurs sont moindres : cette série est donc

$$> \frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} \text{ et } < \frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}}.$$

Il résulte de là que la valeur de la série de Taylor, considérée dans son entier, sera comprise entre les deux séries suivantes :

$$u + \frac{du}{dx}i + \ldots + \frac{d^n u}{dx^n}.\frac{i^n}{1.2\ldots n} + \frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}.\frac{i^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)},$$

$$u + \frac{du}{dx}i + \ldots + \frac{d^n u}{dx^n}.\frac{i^n}{1.2\ldots n} + \frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}}.\frac{i^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}.$$

Passons au cas où les signes + et — se combinent d'une manière quelconque dans la série de *Taylor*.

Nous établirons d'abord cette proposition auxiliaire : *toute fonction* U *d'une variable* t *qui s'évanouit en même tems que cette variable, et dont le coefficient différentiel du premier ordre que je désignerai par* U', *ne change pas de signe dans l'intervalle de* t = o *à* t = b, *et ne devient pas infini, est nécessairement de même signe que ce coefficient, si b est positif, et de signe contraire, si b est négatif.*

Si l'on partage l'intervalle b en un nombre n de parties égales, et qu'à

$$t = 0, \ = \frac{b}{n}, \ = \frac{2b}{n}, \ = \frac{3b}{n}, \text{ etc.},$$

répondent

$$U = 0, \quad = U_1, \quad = U_2, \quad = U_3, \text{ etc.};$$
$$U' = U'_0, \quad = U'_1, \quad = U'_2, \quad = U'_3, \text{ etc.};$$

on aura

$$U_1 - 0 = \frac{b}{n}(U'_0 + V_0),$$
$$U_2 - U_1 = \frac{b}{n}(U'_1 + V_1),$$
$$U_3 - U_2 = \frac{b}{n}(U'_2 + V_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$U_n - U_{n-1} = \frac{b}{n}(U'_{n-1} + V_{n-1}),$$

V_0, V_1, V_2... étant des quantités que la supposition de $b = 0$ rend nulles, et qui conséquemment peuvent devenir aussi petites que l'on voudra, en faisant croître le nombre n sans toucher à b, tandis que U'_0, U'_1, etc., ne varieront pas, ce qui résulte du théorème de *Taylor* (Chap. II) : or, comme on peut rendre le second terme de chacune des expressions ci-dessus, aussi petit que l'on voudra par rapport au premier, le signe de chacun des seconds membres, ne dépendra donc que de celui de leur premier terme, et si ce dernier signe ne change pas, ainsi qu'on le suppose; il sera celui de tous les seconds membres : or, en ajoutant les premiers membres et effaçant les termes qui se détruisent, on trouve que la somme est égale à U_n, c'est-à-dire, à la valeur de U correspondante à b, en sorte que cette somme sera de même signe que U'_0, U'_1, etc., si b est positif, et de signe contraire, si b est négatif.

Cela posé, soient m et M des quantités constantes dont l'une est plus petite et l'autre plus grande que toutes les valeurs que reçoit dans l'intervalle de x à $x+i$, la série

$$\frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{i}{2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{i^2}{1.2.3} + \text{etc.};$$

en donnant à i des valeurs successives, à partir de 0 : on aura, d'après la série de *Taylor*,

$$u' - u > mi \quad \text{et} \quad u' - u < Mi,$$

u' étant u lorsque x devient $x+i$: ces inégalités donnent celles-ci

$$u'-u-mi>0,\quad Mi-(u'-u)>0.$$

Mais il est visible que ces quantités peuvent être regardées comme des fonctions de i qui s'évanouissent pour $i=0$, puisqu'alors u' redevient u, et comme elles sont toutes deux positives, il faut, conformément au lemme, que le coefficient différentiel de chacune, pris par rapport à i, soit positif, et ne devienne pas infini pour toute valeur de i entre zéro et celle à laquelle on s'arrête. Or, ces coefficiens qui sont respectivement

$$\frac{du'}{di}-m \quad \text{et} \quad M-\frac{du'}{di},$$

en observant que u ne renferme pas i, restent positifs, si l'on prend m moindre que la plus petite des valeurs $\frac{du'}{di}$ et M plus grande que la plus grande de ces valeurs ; ainsi, comme $\frac{du'}{di}=\frac{du'}{dx}$ (pag. 117), la valeur de la série $\frac{du}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{i}{2}$, etc., sera comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs de $\frac{du'}{dx}$, et c'est ainsi qu'on détermine m et M.

Supposons ensuite que m et M représentent des quantités, l'une plus petite et l'autre plus grande que

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{i}{3}+\frac{d^4u}{dx^4}\frac{i^2}{3.4}+\text{etc.},$$

en considérant toute la série de *Taylor*, on aura

$$u'-u-\frac{du}{dx}\frac{i}{1}>\frac{mi^2}{1.2},\qquad u'-u-\frac{du}{dx}\frac{i}{1}<\frac{Mi^2}{1.2},$$

et par conséquent les différences

$$u'-u-\frac{du}{dx}\frac{i}{1}-\frac{mi^2}{2},\quad \frac{Mi^2}{2}-\left(u'-u-\frac{du}{dx}\frac{i}{1}\right),$$

qui s'évanouissent pour $i=0$, devront être toutes deux positives. Si l'on en prend les coefficiens différentiels par rapport à i, il viendra, en observant que $\frac{du'}{di}=\frac{du'}{dx}$,

$$\frac{du'}{di}-\frac{du}{dx}-mi,\quad Mi-\frac{du'}{di}+\frac{du}{dx},$$

quantités essentiellement positives et qui s'évanouissent encore pour $i=0$, parce qu'alors $\frac{du'}{di}=\frac{du'}{dx}=\frac{du}{dx}$; or, le signe du coefficient différentiel, par rapport à i, de chacune d'elles, devant être le même que celui de ces fonctions, il faudra que

$$\frac{d^2u'}{di^2}-m,\quad M-\frac{d^2u'}{di^2},$$

soient toujours positifs, ce qui aura lieu, si m est moindre que la plus petite des valeurs de $\frac{d^2u'}{di^2}$, et si M surpasse la plus grande de ces valeurs; et comme $\frac{d^2u'}{di^2}=\frac{d^2u'}{dx^2}$, on conclura encore que la série

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{i}{3}+\frac{d^4u}{dx^4}\frac{i^2}{3.4}\text{ etc.},$$

est comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs de $\frac{d^2u'}{dx^2}$.

On peut continuer de cette manière, en sorte qu'il suffira d'indiquer le calcul pour les limites m et M de la série

$$\frac{d^3u}{dx^3}+\frac{d^4u}{dx^4}\frac{i}{4}+\frac{d^5u}{dx^5}\frac{i}{4.5},$$

en observant qu'il faut différentier trois fois de suite par rapport à i les expressions

$$u'-u-\frac{du}{dx}\frac{i}{1}-\frac{d^2u}{dx^2}\frac{i^2}{1.2}-\frac{mi^3}{1.2.3},$$

$$\frac{Mi^3}{1.2.3}-\left(u'-u-\frac{du}{dx}\frac{i}{1}-\frac{d^2u}{dx^2}\frac{i^2}{1.2}\right),$$

ce qui donne successivement

$$\frac{du'}{di}-\frac{du}{dx}-\frac{d^2u}{dx^2}i-\frac{mi^2}{1.2};\quad \frac{Mi^2}{1.2}-\left(\frac{du'}{di}-\frac{du}{dx}-\frac{d^2u}{dx^2}i\right),$$

$$\frac{d^2u'}{di^2} - \frac{d^2u}{dx^2} - mi; \qquad Mi - \left(\frac{d^2u'}{di^2} - \frac{d^2u}{dx^2}\right),$$

$$\frac{d^3u'}{di^3} - m; \qquad M - \frac{d^3u'}{di^3},$$

et, en raisonnant comme ci-dessus, on trouvera que m et M doivent représenter la plus petite et la plus grande valeur de $\frac{d^3u'}{dx^3}$.

On a supposé l'accroissement i positif; s'il était négatif, il faudrait prendre les limites dans un ordre inverse; m répondrait à la limite en excès, et M à la limite en défaut.

Ce surplus du développement

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} + \frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}} \cdot \frac{i}{n+2} + \frac{d^{n+3}u}{dx^{n+3}} \cdot \frac{i^2}{(n+2)(n+3)} + \text{etc.},$$

devant être compris entre la plus grande et la plus petite des valeurs que prend $\frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}}$ pour toutes celles que l'on peut donner à i depuis o jusqu'à la valeur actuelle i, il est visible qu'il existe une valeur intermédiaire du même coefficient différentiel, qui est précisément égale à la série ci-dessus, et qu'en la substituant dans la série de *Taylor*, elle donnerait, par un nombre $n+2$ de termes, la valeur exacte du développement de u' ou de $f(x+i)$.

Soit U_{n+1} cette valeur de $\frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}}$ qui doit être nécessairement finie, toutes les fois que le coefficient différentiel $\frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}}$ ne devient pas infini dans l'étendue des valeurs de i, depuis o jusqu'à i: on aura rigoureusement

$$u' = u + \frac{du}{dx}\frac{i}{1} + \ldots\ldots \frac{d^nu}{dx^n}\frac{i^n}{1.2\ldots n} + \frac{U_{n+1}i^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}.$$

On voit maintenant comment il est possible d'assigner, pour i, une valeur telle que le terme $\frac{d^nu}{dx^n}\frac{i^n}{1.2\ldots n}$ surpasse la somme de ceux qui le suivent dans la série de *Taylor*: car les deux derniers termes de

l'expression ci-dessus, revenant à

$$\frac{i^n}{1.2\ldots n}\left\{\frac{d^n u}{dx^n} + U_{n+1}\frac{i}{n+1}\right\},$$

il suffit de faire

$$i < \frac{n+1}{U_{n+1}}\,\frac{d^n u}{dx^n}:$$

dans ce cas, il n'est pas nécessaire de connaître la valeur de U_{n+1}; on peut la remplacer par une quantité qui la surpasse, et employer à cet effet la plus grande valeur que prend $\frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}}$ dans un intervalle plus étendu que la valeur de i à laquelle on s'arrête.

Nous allons étendre, en suivant toujours M. *Lacroix*, la même analyse aux fonctions de deux variables.

Désignons encore par u une fonction de x et y, et faisons pour un moment

$$x = a + it, \quad y = b + kt,$$

t étant une nouvelle variable dont u sera par conséquent une fonction; on aura alors

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dx}i + \frac{du}{dy}k,$$

et comme $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ sont les constantes i et k, on aura

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{dx^2}{dt^2} + 2\frac{d^2u}{dxdy}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{dy^2}{dt^2}$$
$$= \frac{d^2u}{dx^2}i^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}ik + \frac{d^2u}{dy^2}k^2,$$

en sorte que si t se change en $t+\alpha$, on aura les deux développemens identiques

$$u' = u + \frac{du}{dt}\frac{\alpha}{1} + \frac{d^2u}{dt^2}\frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dt^3}\frac{\alpha^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$u' = u + \alpha\left\{\frac{du}{dx}i + \frac{du}{dy}k\right\}$$
$$+ \frac{\alpha^2}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}i^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}ik + \frac{d^2u}{dy^2}k^2\right\} + \text{etc.},$$

si l'on arrête le premier au terme $\frac{d^n u}{dt^n} \cdot \frac{\alpha^n}{2 \ldots . n}$, la somme de tous les termes suivans aura pour limites, d'après ce qui vient d'être démontré, ce que devient $\frac{d^{n+1}u'}{dt^{n+1}} \cdot \frac{\alpha^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$, lorsqu'on y met successivement pour $\frac{d^{n+1}u'}{dt^{n+1}}$ la plus grande et la plus petite valeur que prend ce coefficient différentiel depuis $\alpha = 0$, jusqu'à la valeur à laquelle on s'arrête. Il suit de là qu'en poussant le second développement jusqu'au terme

$$\frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\left\{\frac{d^n u}{dx^n}i^n + n\frac{d^n u}{dx^{n-1}dy}i^{n-1}k + \ldots + \frac{d^n u}{dy^n}k^n\right\},$$

la somme du reste de la série aura pour limites ce que devient

$$\frac{\alpha^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\left\{\frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}}i^{n+1}+(n+1)\frac{d^{n+1}u'}{dx^n dy}i^n k + \ldots + \frac{d^{n+1}u'}{dy^{n+1}}k^{n+1}\right\}$$

lorsqu'on y met, au lieu de la fonction entre parenthèses, la plus grande et la plus petite valeur qu'elle prend depuis $\alpha = 0$, jusqu'à la dernière valeur que l'on donne à α, et il faut observer que le changement de t en $t+\alpha$ répond aux changemens de x en $x+\alpha i$, et de y en $y+\alpha k$; de sorte qu'aux valeurs de α, depuis zéro jusqu'à l'unité, correspondent des valeurs de αi et de αk depuis zéro jusqu'à i et k.

Or, en prenant $\alpha = 1$, le second développement de u' devient

$$u' = u + \frac{1}{1}\left\{\frac{du}{dx}i + \frac{du}{dy}k\right\},$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}i^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}ik + \frac{d^2u}{dy^2}k^2\right\}$$
$$+ \text{etc.},$$

dont on a les limites en mettant dans

$$\frac{1}{2\ldots(n+1)}\left\{\frac{d^{n+1}u'}{dx^{n+1}}i^{n+1} + (n+1)\frac{d^{n+1}u'}{dx^n dy}i^n k + \ldots + \frac{d^{n+1}u'}{dy^{n+1}}k^{n+1}\right\}$$

en place de la série entre parenthèses la plus grande et la plus petite valeur qu'elle prend depuis $i = 0$ et $k = 0$ jusqu'aux valeurs actuelles de i et k: on pourra, à plus forte raison, prendre une valeur plus grande que la plus grande et plus petite que la plus petite.

ABRÉVIATION PAR LES INFINIMENT PETITS.

Nous avons offert, dans les trois premiers chapitres du texte, les principes fondamentaux du calcul différentiel, en ne l'appuyant que sur des considérations purement analytiques et indépendantes de toute hypothèse sur la valeur et la nature des accroissemens qui ne se montrent dans le calcul que pour marquer la trace des opérations par lesquelles on est parvenu aux fonctions appelées coefficiens différentiels, dont la détermination pour toutes les fonctions, est le véritable objet de cette analyse. *Leibnitz* à qui nous en devons la connaissance, a présenté cette méthode d'une manière moins rigoureuse en apparence, mais cependant bien commode dans les applications, et souvent très-utile par cette raison. Il suppose que les quantités variables prennent des accroissemens infiniment petits, et tels qu'on doit les négliger vis-à-vis des grandeurs finies, en sorte que ces accroissemens ne peuvent jamais être comparés qu'entre eux; et c'est en effet ce qu'on suppose toujours dans les applications. Il demande ensuite qu'on puisse prendre à volonté, l'une pour l'autre, deux grandeurs qui ne diffèrent entre elles que d'une quantité infiniment petite; d'où il résulte qu'il faut supprimer, dans le développement des accroissemens des fonctions, toutes les puissances de dx, dy, etc., supérieures à la première. Ainsi, pour obtenir la différentielle de xy, il développe le produit

$$(x + dx)(y + dy) = xy + xdy + ydx + dxdy,$$

il retranche la fonction primitive xy, puis il rejette le terme $dxdy$ comme étant infiniment petit à l'égard des deux autres, ce qui donne

$$d(xy) = xdy + ydx.$$

En effet, $dxdy$ peut être considéré comme le quatrième terme de cette proportion,

$$1 : dx :: dy : dxdy;$$

donc, si dx est infiniment petit par rapport aux grandeurs finies de la même espèce que l'unité, c'est-à-dire, s'il est contenu un nombre infini de fois dans l'unité, $dxdy$ sera contenu de même un nombre infini de fois dans dx ou dans dy, et, par conséquent, il sera infiniment petit ou négligeable par rapport à dx ou dy.

L'homogénéité des expressions différentielles, est une suite nécessaire de

la méthode de *Leibnitz* ; car d'après la remarque faite ci-dessus à l'égard de $dx\,dy$, il ne peut rester que des termes du degré le moins élevé, tous les autres devant être négligés vis-à-vis de ceux-ci.

En passant au second ordre, *Leibnitz* regarde les différentielles secondes comme infiniment petites par rapport aux différentielles premières, et, par conséquent, comme homogènes avec les quarrés de celles-ci, supposition qui est une conséquence nécessaire de celle qui a été faite à l'égard des différentielles du premier ordre ; car si dans $M dx + N dy$, par exemple, on fait varier en même tems que dx et dy, les x et les y qui sont dans M et N, on aura un résultat de la forme

$$M d^2x + N d^2y + P dx^2 + Q dx\,dy + R dy^2 ;$$

mais dx^2, $dx\,dy$, dy^2 sont infiniment petits à l'égard de dx et dy ; il faut donc, pour l'homogénéité, que d^2x, d^2y soient infiniment petits par rapport à dx et dy, et qu'ils soient de même ordre que dx^2 et dy^2.

Il suit de là que, pour trouver les différentielles secondes, troisièmes, etc., il faut regarder les différentielles comme de nouvelles variables qui ont elles-mêmes leurs différentielles qui sont d'un ordre supérieur, et rejeter du résultat tous les termes qui seraient d'un ordre supérieur à celui-là.

C'est de ce petit nombre de principes que se déduisent les divers procédés de la différentiation ; et on voit déjà qu'ils rendent toutes les règles que nous avons données dans le texte : cependant, pour mieux montrer les abréviations qui en résultent, nous allons entrer dans les détails, et nous commencerons par la démonstration du théorème de *Taylor*.

Si l'on considère une suite de valeurs de x, savoir : $x, x', x'', x''' \ldots$ telles que la différence constante et infiniment petite, soit dx, et si les valeurs correspondantes de y sont $y, y', y'', y''' \ldots$, on aura

$$y' - y = dy, \quad y'' - y' = dy', \quad y''' - y'' = dy'', \quad y^{\text{IV}} - y''' = dy''' \ldots$$

d'où

$$y' = y + dy, \quad y'' = y + 2dy + d^2y, \quad y''' = y + 3dy + 3d^2y + d^3y,$$
$$y^{\text{IV}} = y + 4dy + 6d^2y + 4d^3y + d^4y \ldots,$$

et généralement,

$$y^{(n)} = y + \frac{n}{1} dy + \frac{n(n-1)}{2} d^2y + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} d^3y + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} d^4y + \text{etc.},$$

où dy, d^2y, d^3y, d^4y.... sont des infiniment petits des premier, second, troisième, quatrième, ... ordres, parce que les ordonnées consécutives y, y', y''.... sont infiniment rapprochées l'une de l'autre. D'ailleurs, si, dans les développemens de Δy, $\Delta^2 y$...., suivant les puissances de Δx, données (pag. 13), on change Δx dans l'infiniment petit dx, et en même tems Δy, $\Delta^2 y$.... en dy, d^2y...., et si on rejette de chacun de ces développemens les puissances de dx supérieures à la plus petite, comme négligeables par rapport à celle-ci, on aura $dy = P dx$, $d^2y = Q\, dx^2$, $d^3y = R\, dx^3$...., conséquemment dy, d^2y, d^3y.... sont de même ordre que dx, $dx^2 = dx.dx$, $dx^3 = dx^2.dx$. Cela posé, comme $y^{(n)}$ est une quantité finie, il faut ne conserver du second membre que les quantités finies : ainsi, en supposant $n = \infty$, afin de mettre entre la dernière ordonnée $y^{(n)}$ et l'ordonnée de départ y, un intervalle ndx fini, et négligeant, par rapport à n, les nombres soustraits dans les facteurs, on aura d'abord

$$y^{(n)} = y + ndy + \frac{n^2 d^2y}{2} + \frac{n^3.d^3y}{2.3} + \frac{n^4 d^4y}{2.3.4} + \text{etc.},$$

et les produits ndy, n^2d^2y, n^3d^3y, etc., sont finis, parce que l'un des facteurs étant un infiniment grand d'un certain ordre, l'autre est un infiniment petit du même ordre. Posant donc $ndx = i$ quantité finie, et remplaçant n par $\frac{i}{dx}$, on aura

$$y^{(n)} = f(x + ndx) = f(x+i) = y + \frac{dy}{dx}i + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{i^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{i^3}{2.3} + \text{etc.},$$

ce qui est le théorême de *Taylor*.

Ainsi, pour avoir la différentielle première Pdx d'une fonction $y = fx$, on changera x en $x + dx$, et alors y deviendra $y + dy$; on rejettera, comme négligeables par rapport au terme multiplié par dx, ceux qui doivent être multipliés par dx^2, dx^3, etc., ce qui revient à recueillir les termes multipliés par dx, dont la somme est la différentielle première. Si on opère sur P comme on vient d'opérer sur fx, et si on désigne le résultat par Qdx, le produit par dx sera Qdx^2, différentielle seconde de $y = fx$; de celle-ci on déduira de la même manière la différentielle troisième Rdx^3, et ainsi de suite. Tel est le résumé des trois premiers chapitres.

Si on a démontré, comme on le verra dans le titre suivant, sans supposer

le théorème de *Taylor*, que toute fonction d'une variable comporte une différentielle première; en sorte que cette fonction étant fu, et sa différentielle Pdu, il soit prouvé que le coefficient P ne peut être ni nul ni infini, la variable u restant indéterminée, il devient facile d'établir le théorème de *Taylor*, ainsi qu'on va le voir.

En effet, en supposant qu'on ait prouvé que

$$\mathrm{d}(fu) = P\mathrm{d}u;$$

et faisant alors

$$u = x + i,$$

on a

$$\mathrm{d}(f(x+i)) = P(\mathrm{d}x + \mathrm{d}i).$$

Soit i une constante, et

$$\frac{\mathrm{d}(f(x+i))}{\mathrm{d}x} = P;$$

soit x une constante, et

$$\frac{\mathrm{d}(fx+i)}{\mathrm{d}i} = P;$$

donc le coefficient différentiel P reste le même, soit qu'on différentie la fonction $f(x+i)$ en ne faisant varier que x, soit qu'on la différentie en ne faisant varier que i.

Reprenons le développement

$$f(x+i) = fx + Ai + Bi^2 + Ci^3 + Di^4 + \text{etc.},$$

où A, B, C, etc., sont des fonctions encore inconnues de x; on aura, pour déterminer les fonctions A, B, C, etc., l'identité

$$\frac{\mathrm{d}f(x+i)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(x+i)}{\mathrm{d}i},$$

qui donne

$$\frac{\mathrm{d}(fx)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}i + \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}i^2 + \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}i^3 + \text{etc.} = A + 2Bi + 3Ci^2 + 4Di^3 + \text{etc.};$$

comparant les coefficiens des mêmes puissances de i, il vient

$$\begin{array}{l|c|l}
A = \dfrac{d(fx)}{dx} & & A = \dfrac{d(fx)}{dx} \\
B = \frac{1}{2}\dfrac{dA}{dx} & & B = \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2(fx)}{dx^2} \\
C = \frac{1}{3}\dfrac{dB}{dx} & \text{d'où} & C = \dfrac{1}{2.3}\dfrac{d^3(fx)}{dx^3} \\
D = \frac{1}{4}\dfrac{dC}{dx} & & D = \dfrac{1}{2.3.4}\dfrac{d^4(fx)}{dx^4} \\
\text{etc.} & & \text{etc.}
\end{array}$$

et conséquemment

$$f(x+i) = fx + \frac{d(fx)}{dx}i + \frac{d^2(fx)}{dx^2}\frac{i^2}{1.2} + \frac{d^3(fx)}{dx^3}\frac{i^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

c'est-à-dire,

$$f(x+i) = y + \frac{dy}{dx}i + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{i^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

en remplaçant fx par y. Mais on observera que cette démonstration doit venir à la suite de la différentiation des fonctions d'une seule variable, puisqu'elle suppose la forme de la différentielle première de ces fonctions, qu'on aura déterminée par le fait, au moins pour toutes les fonctions connues.

Passons aux différentielles des quantités transcendantes données dans le chapitre quatrième : il suffit d'assigner celles du sinus et du cosinus. On a

$$d(\sin x) = \sin(x+dx) - \sin x, \quad d(\cos x) = \cos(x+dx) - \cos x,$$

c'est-à-dire,

$$d(\sin x) = \sin x \cos dx + \sin dx \,.\, \cos x - \sin x,$$
$$d(\cos x) = \cos x \cos dx - \sin x \sin dx - \cos x.$$

Or, l'accroissement dx étant regardé comme infiniment petit, $\cos dx = 1$; et en place de $\sin dx$, on peut prendre l'arc infiniment petit dx; donc

$$d(\sin x) = \cos x \,.\, dx, \quad d(\cos x) = -\sin x . dx.$$

Si on prend les différentielles successives de $\sin x$ et $\cos x$, et qu'on en substitue les coefficiens dans la série de *Taylor*, on aura les développemens $\sin(x+dx)$, $\cos(x+dx)$, l'accroissement dx étant quelconque.

Ces mêmes formules peuvent encore se trouver très-simplement par la géométrie.

Fig. 51. Soit décrit avec le rayon $CA = 1$ un cercle $AMBA$, la perpendiculaire MP sera le sinus de l'arc AM, et CP en sera le cosinus : si l'on mène l'ordonnée pm infiniment voisine de PM, l'arc infiniment petit Mm qui est sensiblement une ligne droite, sera la différentielle dx de l'arc $AM = x$; mn sera donc celle de $\sin x$, et Pp ou Mn celle du cosinus, mais cette dernière différentielle doit être prise négativement, parce que l'arc AM croissant de $Mm = dx$, et le sinus de $mn = d(\sin x)$, le cosinus diminue de $Pp = Mn$, qui sera conséquemment $-d(\cos x)$.

Cela posé, en considérant le petit triangle Mmn comme ayant ses trois côtés rectilignes, comme d'ailleurs ces côtés sont perpendiculaires à ceux du grand triangle CPM, ces triangles seront semblables, et donneront

$$CM : CP :: Mm : \quad mn = \quad dx \cdot \cos x$$
$$CM : PM :: Mm : -Mn = -dx \cdot \sin x ;$$

donc encore

$$d(\sin x) = dx \cdot \cos x, \quad d(\cos x) = -dx \sin x.$$

Pour $CM = r$, on trouve

$$d(\sin x) = \frac{dx \cdot \cos x}{r}, \quad d(\cos x) = -\frac{dx \sin x}{r}.$$

Si maintenant le rayon CA étant $= r$, on désigne l'arc AM par s, et conséquemment son accroissement infiniment petit Mm par ds, AP par x, PM par y, en sorte que $Pp = Mn = dx$, $nm = dy$, le triangle rectangle Mmn donnera

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Or l'équation du cercle est $y = \sqrt{2rx - xx}$, d'où l'on tire

$$dy = \frac{rdx - xdx}{\sqrt{2rx - xx}} \quad \text{et} \quad dy^2 = \frac{(r-x)^2\, dx^2}{2rx - xx}.$$

Substituant cette valeur de dy^2 dans la formule de ds, et réduisant, on trouve

$$(1) \ldots ds = \frac{rdx}{\sqrt{2rx - xx}},$$

x étant le sinus verse de l'arc *AM*. La même équation du cercle donne

$$r - x = \sqrt{rr - yy}, \quad \text{d'où} \quad - dx = \frac{-y dy}{\sqrt{rr - yy}},$$

et

$$dx^2 = \frac{y^2 dy^2}{rr - yy};$$

substituant cette valeur de dx^2 dans l'expression de ds, et réduisant, on trouvera

$$(2) \ldots ds = \frac{r dy}{\sqrt{rr - yy}},$$

y étant le sinus de l'arc s dans un cercle dont le rayon $= r$. C'est la formule trouvée (pag. 43) pour $r = 1$.

A cause de $CP = CA - AP$, ou $u = r - x$, on a

$$dx = - du \quad \text{et} \quad \sqrt{2rx - xx} = \sqrt{rr - uu};$$

ainsi la formule (1) devient

$$(3) \ldots ds = - \frac{r du}{\sqrt{rr - uu}},$$

u étant le cosinus de l'arc s dans le cercle d'un rayon $= r$. C'est la formule trouvée (pag. 44) pour $r = 1$.

La trigonométrie donne cette relation $t = \frac{ry}{u}$, t désignant la tangente de l'arc *AM*, u son cosinus, et y son sinus : on a donc

$$t = \frac{ry}{\sqrt{rr - yy}}, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{rt}{\sqrt{rr + tt}}; \quad dy = \frac{r^3 dt}{(rr + tt)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\sqrt{rr - yy} = \frac{rr}{\sqrt{rr + tt}}.$$

Substituant ces valeurs de dy et de $\sqrt{rr - yy}$ dans (2), on trouvera

$$(4) \ldots ds = \frac{r^2 dt}{rr + tt}.$$

C'est la formule trouvée (pag. 44) pour la différentielle de l'arc dont la tangente est t dans l'hypothèse $r = 1$.

t' étant la cotangente de l'arc s, on a $t' = \frac{ru}{y}, = \frac{r\sqrt{rr - yy}}{y}$;
donc

$$(5) \ldots ds = -\frac{r^2 dt'}{rr + t't'};$$

formule trouvée (pag. 44) pour la différentielle d'un arc, donné par la cotangente, en supposant $r = 1$.

Enfin, q étant la sécante et q' la cosécante de l'arc s, on a

$$q = \frac{rr}{u} = \frac{r^2}{\sqrt{rr - yy}}, \quad q' = \frac{r^2}{y},$$

et conséquemment

$$(6) \ldots ds = \frac{r^2 dq}{q\sqrt{qq - rr}}, \quad ds = -\frac{r^2 dq'}{q'\sqrt{q'q' - rr}} \ldots (7)$$

Si l'on part de la formule du binome étendue à tous les cas de l'exposant (pag. 27 et 28), et qu'on en déduise, ainsi que je l'ai fait (*Alg.*, chap. XXII, 3e. édit.), le développement du $\log(x + i)$, qui est

$$\log(x + i) - \log x = \frac{2}{la}\left\{\frac{i}{2x + i} + \frac{i^3}{3(2x + i)^3} + \text{etc.}\right\};$$

qu'on remplace i par dx, supposé infiniment petit, et qu'on rejette conséquemment les puissances de dx, supérieures à la première, et dx lui-même devant $2x$, on aura

$$\log(x + dx) - \log x, \quad \text{ou} \quad d(\log x) = \frac{1}{la}\,\frac{dx}{x},$$

la étant le *logarithme népérien* de la base a, et log désignant les logarithmes calculés sur la base a. Alors de $a^x = y$, on déduit

$$x = \log y, \quad \text{d'où} \quad dx = \frac{1}{la}\,\frac{dy}{y},$$

et conséquemment

$$d(a^x) = la \,.\, a^x\, dx.$$

De ces différentielles premières de $\log x$ et a^x, on passera aux différentielles successives, d'après ce qui a été dit plus haut.

Pour différentier $f(p, q, r)$, p, q, r, etc., étant des fonctions de x, on changera x en $x + \mathrm{d}x$ dans p, q, r, etc.; on fera les opérations indiquées par le signe f, de manière cependant à se borner aux termes multipliés par $\mathrm{d}x$, dont la somme sera la différentielle de $f(p, q, r, \text{etc.})$, démontrée dans le chapitre cinquième.

Quant aux équations $f(y, x) = 0$, dans lesquelles y est une fonction de x, on différentie par rapport à y en observant les règles précédemment démontrées, on divise par $\mathrm{d}x$, et on égale le résultat à zéro. On trouve de la même manière les dérivées consécutives auxquelles on est parvenu dans le sixième chapitre.

Pour résoudre la question du chapitre septième, d'abord dans le cas le plus simple où il s'agit de passer de l'hypothèse de $y = fx$ à l'hypothèse inverse de $x = \varphi y$, c'est-à-dire d'abord du $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ au $\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}$, on différentiera le coefficient différentiel $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ à la manière d'une fraction, en regardant $\mathrm{d}y$ comme une constante, et en représentant la différentielle de $\mathrm{d}x$ par $\mathrm{d}(\mathrm{d}x)$, ou plus commodément par d^2x, et on aura. . . . .

$$-\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^3} = -\frac{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3} = -\frac{x''}{x'^3}.$$

Pour trouver la formule qui doit, sous la même hypothèse, remplacer le $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$, on différentiera $-\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^3}$, et on trouvera . . . .

$$\frac{-\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x^3\,\mathrm{d}^3x + 3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x^2\,(\mathrm{d}^2x)^2}{\mathrm{d}x^7} = \frac{3\,\mathrm{d}y\,(\mathrm{d}^2x)^2}{\mathrm{d}x^6} - \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}x^4}$$

$$= \frac{3\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right)^2}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^5} - \frac{\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^4} = \frac{3\,x''^2}{x'^5} - \frac{x'''}{x'^4},$$

et ainsi de suite. Dans la question plus générale où x et y sont fonctions d'une troisième variable, on fait varier en même tems $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$, et les coefficiens différentiels

des second, troisième, quatrième, etc., ordres sont remplacés par

$$p = \frac{dx}{dy},$$

$$q = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3},$$

$$r = \frac{dx^2\, d^3y - 3\, dx\, d^2x\, d^2y + 3\, dy\, (d^2x)^2 - dx\, dy\, d^3x}{dx^5},$$

$$s = \frac{\begin{array}{c} dx^3\, d^4y - 6\, dx^2\, d^2x\, d^3y - 4\, (dx)^2\, d^2y\, d^3x \\ + 15\, dx\, (d^2x)^2\, d^2y + 10\, dx\, dy\, d^2x\, d^3x - 15\, dy\, (d^2x)^3 - (dx)^2\, dy\, d^4x \end{array}}{dx^7};$$

etc.

Nous nous bornerons à constater l'identité de la formule $\frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3}$ avec celle-ci $\frac{y'' - x''(y')}{x'^2}$ donnée (pag. 90) : cette dernière est . . .

$$\frac{\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{d^2y - d^2x\, \frac{dy}{dx}}{dx^2},$$ en omettant le dt qui rappelle la variable dont x et y sont fonctions ; enfin, en multipliant haut et bas par dx, on retombe sur la transformée q. Ainsi, dans ces formules q, r, s, etc., déduites les unes des autres par la différentiation, on est averti, par les différentielles de dx et de dy qu'elles contiennent, que x et y sont des fonctions d'une troisième variable.

Les chapitres VIII, IX, X, XI et XII ne sont susceptibles d'aucune abréviation par la méthode des infiniment petits.

Dans le chapitre treizième, où il s'agit de trouver la différentielle d'une fonction de plusieurs variables indépendantes, et d'abord de $u = f(x, y)$, on attribuera à x et y les accroissemens infiniment petits et indépendans dx et dy, et alors u prendra l'accroissement infiniment petit du ; on développera $f(x + dx, y + dy)$ jusqu'aux termes multipliés par dx et dy inclusivement, en rejetant, comme nuls par rapport à ceux-là, les termes multipliés par des puissances de dx et dy, et par des produits de ces accroissemens, et la somme $Pdx + Qdy$ sera la différentielle première

du. Ainsi

$$du = Pdx + Qdy = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy.$$

En différentiant de nouveau par rapport aux variables x et y qui sont dans les coefficiens différentiels $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, on aura, d'après la notation convenue,

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2$$
$$= \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2.$$

On passerait de la même manière aux différentielles successives. Ce que nous venons de dire s'étend aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Le chapitre quinzième s'abrège ainsi : on mène une ordonnée PM au point de tangence M et une ordonnée infiniment voisine $P'M'$; alors le côté MM' peut être regardé comme une petite ligne droite qui est tout à-la-fois un élément de la courbe et de la tangente qui n'en est que le prolongement. Si x et y sont les coordonnées du point M, et s l'arc AM, on a $Mm = dx$, $M'm = dy$, $MM' = ds$. Soit la perpendiculaire MN en M à la tangente TM : les triangles semblables MmM', TPM, PMN, donneront les quatre proportions Fig. 52.

$$mM'(dy) : mM\ (dx) :: PM(y) : PT = \frac{ydx}{dy} = \text{sous-tang},$$

$$mM'(dy) : MM'(ds) :: PM(y) : MT = \frac{yds}{dy}$$

$$Mm\ (dx) : MM'(ds) :: PM(y) : MN = \frac{yds}{dx}$$

$$Mm\ (dx) : mM'(dy) :: PM(y) : PN = \frac{ydy}{dx} = \text{sous-norm.}$$

Notre objet n'est pas d'abréger la recherche de l'expression du rayon de courbure donnée dans le chapitre seizième, mais de montrer encore la coïncidence des deux méthodes.

Ayant mené les deux ordonnées PM, $P'M'$ infiniment voisines, soient les tangentes MT, $M'T'$, et du point T soit abaissée la perpendiculaire Th à $M'T'$. Si on mène les perpendiculaires MC, $M'C$ à MT, $M'T'$ en M et M' jusqu'à leur rencontre en C, MC sera le rayon de courbure, c'est-à-dire, le rayon d'un arc qui coïncidera avec la courbe dans l'élément infiniment petit MM'. La question est donc de trouver CM ou CM'.

Fig. 53.

On a $AP = x$, $PM = y$, $MM' = ds$; $CM = r$, $Mm = dx$, $mM' = dy$,

$$PT = y\frac{dx}{dy},\ AT = y\frac{dx}{dy} - x,\ TT' = d(AT) = d\left(y\frac{dx}{dy} - x\right),$$

MT ou $M'T = y\dfrac{ds}{dy}$, en observant que les lignes MT et $M'T$ ne diffèrent que de l'infiniment petit MM'. Les tangentes MT, $M'T'$ pouvant être regardées comme des lignes parallèles, parce que l'angle $T'M'T = MCM'$ est infiniment petit, les triangles rectangles ThT' et MmM' sont semblables, comme ayant les angles T' et $M'Mm$ égaux, et ils donnent

$$MM'(ds) : M'm(dy) :: TT'\left(d\left(y\frac{dx}{dy} - x\right)\right) : Th = \frac{dy}{ds} \times d\left(y\frac{dx}{dy} - x\right).$$

Les triangles rectangles $M'hT$, CMM', dont les angles aigus C et $hM'T$ sont égaux, comme formés par des côtés perpendiculaires, donnent

$$Th\left(\frac{dy}{ds}\,d\left(y\frac{dx}{dy} - x\right)\right) : M'h \text{ ou } M'T\left(y\frac{ds}{dy}\right) :: MM'(ds) : CM = r;$$

donc

$$r = \frac{y\,ds^3}{dy^2\,d\left(y\dfrac{dx}{dy} - x\right)};$$

expression générale du rayon de courbure. Maintenant, en effectuant la différentiation indiquée dans le dénominateur, ce qu'on pourra faire, ou en ne supposant aucune différentielle constante, ou en regardant comme telle l'une des différentielles dx, dy ou ds, on aura

1°. . . . $r = \dfrac{ds^3}{dy\,d^2x - dx\,d^2y}$ } aucune différentielle n'étant constante.

2°. . . . $r = \dfrac{ds^3}{-dx\,d^2y}$ } dx étant constante, ce qui donne $d^2x = 0$.

3°. . . . $r = \frac{ds^3}{dy\,d^2x}$ } dy étant constante, ce qui donne $d^2y = 0$.

4°. . . $r = -\frac{ds\,dx}{d^2y}$

ou. . . $r = \frac{ds\,dy}{d^2x}$

ds étant constante, ce qui donne $d^2s = 0$, ou, à cause de $ds^2 = dx^2 + dy^2$, $2\,dx\,d^2x + 2\,dy\,d^2y = 0$, d'où.....

$d^2y = -\frac{dx\,d^2x}{dy}$

et $d^2x = -\frac{dy\,d^2y}{dx}$.

L'expression 2°., en observant que $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, peut se mettre sous la forme

$$r = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y} = -\frac{dx^3(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y} = -\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

y' étant $= \frac{dy}{dx}$ et $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Si BF est la développée de AM, et qu'on fasse $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$, $MC = r$, $BQ = t$, $QC = u$, la longueur donnée $AB = a$, Fig. 54. on a vu que $PN = y\frac{dy}{dx}$, $MN = y\frac{ds}{dx}$, $r = \frac{ds^3}{dy\,d^2x}$, dy étant constante. Or, les triangles semblables MPN, MLC, donnent les proportions

$$MP(y) : ML(y + t) :: PN\left(y\frac{dy}{dx}\right) : LC(u - x + a),$$

$$MP(y) : ML(y + t) :: MN\left(y\frac{ds}{dx}\right) : MC(r);$$

d'où on tire

$$u - x + a = \frac{(y + t)\,dy}{dx},$$

$$r = \frac{(y + t)\,ds}{dx}.$$

Or, d'après l'équation différenciée de la courbe, on aura dy et ds en dx; dx disparaîtra, et les deux équations précédentes seront en x, y, u et t. Éliminant x et y, il restera une équation entre t et u, qui sera celle de la développée.

Les formules pour la quadrature et la rectification des courbes, données dans le dix-septième chapitre, s'obtiennent sur-le-champ, quand on emploie la considération des infiniment petits.

Fig. 55. Soient $AP = x$, $PM = y$, et soit menée l'ordonnée infiniment voisine $P'M'$: on aura toujours $PP' = Mm = dx$, $mM' = dy$, et le petit trapèze $PMM'P'$ sera l'élément ou l'accroissement infiniment petit de la surface curviligne APM : ce trapèze ne diffère qu'infiniment peu du rectangle $PMmP' = ydx$; ainsi $\int ydx$ sera la surface AMP, ce signe $\int$ désignant la somme des petits élémens $PMM'P'$ contenus dans APM.

La considération du triangle rectangle $MM'm$ dont les côtés sont infiniment petits, donne, en faisant $AM = s$, et conséquemment $MM' = ds$,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad \text{d'où } \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Le chapitre dix-huitième, dans lequel on donne la méthode pour trouver les plus grandes ou les moindres valeurs d'une fonction d'une variable, ne peut être abrégé par l'emploi des infiniment petits ; nous en dirons autant du chapitre dix-neuvième.

Nous passerons au vingtième chapitre, et en appliquant les infiniment petits à la recherche de l'expression du rayon de courbure des courbes aux coordonnées polaires, nous donnerons encore différentes expressions de ce rayon.

Fig. 56. Soit la courbe AMS dont F soit le pôle ; soient FM et Fm deux ordonnées infiniment voisines ; Mt, mt les tangentes en M et m, sur lesquelles on abaisse du pôle F les perpendiculaires FT, Ft ; Mm', Tt' de petits arcs décrits du pôle F avec les rayons FM, FT. Faisons $FM = \rho$, d'où $mm' = d\rho$, $Mm' = d\gamma$, $Mm = ds$, $CM = r$ qui désigne le rayon vecteur.

A cause de l'angle infiniment petit MFm, les droites FM, Fm peuvent être regardées comme parallèles, et les triangles rectangles $Mm'm$, MTF semblables, parce que l'angle FMT ne surpasse Mmm' que de l'angle infiniment petit MFm, donnent les proportions

$$Mm\,(ds) : Mm'\,(d\gamma) :: Fm\,(\rho) : FT = \rho\frac{d\gamma}{ds},$$

$$Mm\,(ds) : mm'\,(d\rho) :: FM\,(\rho) : MT = \rho\frac{d\rho}{ds}.$$

D'une autre part, les droites MT, mt, peuvent être regardées comme parallèles, parce qu'elles comprennent un angle infiniment petit, et il en

est de même des droites FT et Ft; donc Th et $t't$ seront des lignes égales : or, $t't$ étant l'accroissement infiniment petit de FT, pour le passage du point M au point m, il s'ensuit que $t't = Th$ est la différentielle de FT : on a donc $Th = \mathrm{d}\left(\rho\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}\right)$. Maintenant les triangles semblables mTh, CMm donnent la proportion

$$Th\left(\mathrm{d}\left(\rho\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}\right)\right) : mT \text{ ou } MT\left(\rho\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right) :: Mm\ (\mathrm{d}s) : CM = r,$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\left(\frac{\rho\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}\right)}.$$

On peut ici supposer ou qu'aucune différentielle n'est constante, ou que l'une ou l'autre des quantités $\mathrm{d}\rho$, $\mathrm{d}\gamma$, $\mathrm{d}s$ est constante : on a

1°. $r = \dfrac{\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}s + \rho\mathrm{d}s\mathrm{d}^2\gamma - \rho\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}^2s}$ { aucune différentielle n'étant constante.

ou

$r = \dfrac{\mathrm{d}s^3}{\mathrm{d}\gamma^3 + \mathrm{d}\gamma\mathrm{d}\rho^2 + \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}^2\gamma - \rho\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}^2\rho}$ { en éliminant du dénominateur $\mathrm{d}s$ et d^2s au moyen de la relation $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}\gamma^2$.

2°. $r = \dfrac{\rho\mathrm{d}s^3}{\mathrm{d}\gamma^3 + \mathrm{d}\gamma\mathrm{d}\rho^2 - \rho\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}^2\rho}$ { $\mathrm{d}\gamma$ étant constante, ce qui donne $\mathrm{d}^2\gamma = 0$.

3°. $r = \dfrac{\rho\mathrm{d}s^3}{\mathrm{d}\gamma^3 + \mathrm{d}\gamma\mathrm{d}\rho^2 + \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}^2\gamma}$ { $\mathrm{d}\rho$ étant constante, ce qui donne $\mathrm{d}^2\rho = 0$.

4°. $r = \dfrac{\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}\rho + \rho\mathrm{d}^2\gamma}$

ou

$r = \dfrac{\rho\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\gamma^2 - \rho\mathrm{d}^2\rho}$

{ $\mathrm{d}s$ étant une constante, ce qui donne $\mathrm{d}^2s = 0$ ou . . . . . . $\mathrm{d}\rho\mathrm{d}^2\rho + \mathrm{d}\gamma\mathrm{d}^2\gamma = 0$,

Au lieu de prendre, comme nous venons de le faire, les abscisses γ sur des circonférences dont les rayons ρ varient continuellement, il est plus commode de compter ces abscisses sur des circonférences d'un rayon constant. Soit donc, à cet effet, décrit du pôle F comme centre, avec le rayon FQ, le petit arc Qq; en supposant $FQ = 1$, $Qq = \mathrm{d}\varphi$, on aura $\mathrm{d}\gamma = \rho\mathrm{d}\varphi$ et $\mathrm{d}^2\gamma = \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi + \rho\mathrm{d}^2\varphi$. Ainsi

1°. $r = \dfrac{ds^3}{\rho^2 d\varphi^3 + 2d\varphi d\rho^2 + \rho d\rho d^2\varphi - \rho d\varphi d^2\rho}$ { aucune différentielle n'étant constante.

2°. $r = \dfrac{ds^3}{\rho^2 d\varphi^3 + 2d\varphi d\rho^2 - \rho d\varphi \,.\, d^2\rho}$ { $d\varphi$ étant constante.

3°. $r = \dfrac{ds^3}{\rho^2 d\varphi^3 + 2d\varphi d\rho^2 + \rho d\rho d^2\varphi}$ { $d\rho$ étant constante.

4°. $r = \dfrac{d\rho ds}{2d\rho d\varphi + \rho d^2\varphi}$

ou

$r = \dfrac{\rho d\varphi ds}{\rho d\varphi^2 - d^2\rho}$

} ds étant constante, et ds^2 étant $= d\rho^2 + dy^2, = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$.

La formule 2°. après la substitution faite pour ds de sa valeur . . . . $\sqrt{d\rho^2 + dy^2} = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2} = d\varphi \sqrt{\rho^2 + \left(\dfrac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}$, et les réductions, devient

$$r = \frac{\left\{\rho^2 + \left(\dfrac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\left(\dfrac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 - \rho\dfrac{d^2\rho}{d\varphi^2}},$$

expression du rayon de courbure trouvée (pag. 322).

Fig. 55. Dans le chapitre XXI, nous considérons 1°. la surface engendrée par la révolution de l'arc AM autour de l'axe AX : le petit arc MM' engendre une petite zône sphérique ou conique qui a pour valeur $MM' \times$ circonf MP, c'est-à-dire, $2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2}$, π étant la circonférence dont le diamètre $= 1$; en sorte que la surface finie engendrée par l'arc AM, est . . . . $2\pi \int y \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi \int y dx \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$. 2°. le solide de révolution. Or, le trapézoïde $PMM'P'$ engendre un petit volume qu'on peut regarder comme un prisme, lequel a pour valeur $PP' \times$ cerc. MP, c'est-à-

Fig. 57. dire, $\pi y^2 dx$; conséquemment le volume fini est donné par $\pi \int y^2 dx$.

Passons à la mesure des volumes et des surfaces en général, donnée (chapitre XXIV). 1°. Soient trois axes rectangulaires AX, AY, AZ : si on conçoit le rectangle $Mmfg$ ayant pour côtés $Mm = dx$, $Mg = dy$, dx et dy étant des accroissemens infiniment petits, et par les points M, m, f et g des ordonnées verticales jusqu'à la surface, on aura le volume

élémentaire $MmfgNntu$; or, si par l'extrémité N de l'ordonnée MN que je suppose la plus petite des quatre ordonnées verticales, on suppose un plan horisontal terminé par les quatre faces du petit solide, on aura décomposé ce petit volume en deux autres dont l'un aura pour expression $zdxdy$ et l'autre sera négligeable par rapport à celui-là ; en sorte qu'on aura $\iint zdxdy$ pour expression du volume fini.

2°. Passons à la recherche de l'expression de l'aire de la surface courbe qui couvre le volume V, et désignons cette surface par U.

On sait (*) que l'aire d'un parallélogramme plan $ELTR$, situé d'une manière quelconque dans l'espace, est égale à celle de sa projection horisontale $NXVY$, divisée par le cosinus de l'angle d'inclinaison du plan $ELTR$ suffisamment prolongé sur le plan horisontal. Or, OH étant la rencontre de ces deux plans, si par V on mène la perpendiculaire VK, et qu'on joigne T et K, l'angle VKT sera l'inclinaison des deux plans en question. On a d'abord $\cos VKT = \frac{VK}{KT}$: posons $NX = m$, $NY = n$, $XL = a$, $VT = b$, $YR = c$, d'où on conclut $NE = a + c - b$ (**). Fig. 58.

En menant OQ parallèle à NX, et prolongeant TL, VX jusqu'à leur rencontre en H sur la ligne OH, les triangles rectangles semblables OQH, VKH, donnent

$$OH : OQ \text{ ou } NX :: HV : KV = \frac{HV \times NX}{OH},$$

les triangles rectangles semblables TVH, LXH donnent

$$LX : XH :: VT : VH, \text{ ou } VT - LX : VT :: VH - XH : VH,$$

donc $VH = \frac{nb}{b-a}$; dans le triangle rectangle QOH, on a

$$OH = \sqrt{\overline{OQ}^2 + \overline{QH}^2},$$

et il s'agit de trouver $QH = VH - VQ = VH - OY$; or on obtient OY en comparant les triangles semblables RYO, ENO qui donnent

(*) *Voy.* mes *Réciproques*, (2e. édit.)

(**) En effet, la surface $ELTR$ étant plane, et les ordonnées NE, YR, XL, VT étant supposées croissantes, il résulte de l'équation du plan $EN = z = Ax + By + C$, que $EN + VT = YR + XL$; d'où $EN = YR + XL - VT = c + a - b$.

$YR : NE :: YO : NO$, d'où $YR - NE : YR :: YO - NO : OY$,

donc $OY = \frac{en}{b-a}$, On connaît donc QH; et en observant que $OQ = m$, on connaît aussi OH : par ces substitutions

$$VK = \frac{HV \times NX}{QH} = \frac{mnb}{\sqrt{\{m^2(b-a)^2 + n^2(b-c)^2\}}},$$

doù il résulte que

$$KT = \frac{b\sqrt{\{m^2(b-a)^2 + n^2(b-c)^2 + m^2n^2\}}}{\sqrt{\{m^2(b-a)^2 + n^2(b-c)^2\}}},$$

ainsi

$$\cos TKV \frac{mn}{\sqrt{\{m^2(b-a)^2 + n^2(b-c)^2 + m^2n^2\}}},$$

et conséquemment

$$\text{aire } ELTR = \sqrt{\{m^2(b-a)^2 + n^2(b-c)^2 + m^2n^2\}}.$$

Supposons maintenant une surface courbe qui passe par les quatre points E, L, T, R, et qui ait pour équation $z = f(x,y)$; z étant l'ordonnée NE, et soient $NX = dx$, $NY = dy$; on aura $XL = f(x + dx, y)$ $YR = f(x, y + dy)$, $VT = f(x + dx, y + dy)$, en sorte que les différentielles partielles $\frac{dz}{dx}dx$, $\frac{dz}{dy}dy$, dont la somme compose la différentielle totale dz, seront $XL - NE = \frac{dz}{dx}dx$, et $YR - NE = \frac{dz}{dy}dy$, en supposant les accroissemens dx et dy infiniment petits, hypothèse sous laquelle on supprime les termes de deux dimensions de ces accroissemens dans XL, YR et VT; alors, la portion $ERTL$ de la surface de courbe, devient sensiblement plane ; or, à cause de $m = dx$, $n = dy$, $b - a = \frac{dz}{dy}dy$, $b - c = \frac{dz}{dx}dx$, on a

$$\text{aire } ELTR = \iint dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2};$$

formule trouvée (page 399).

Des Limites.

« *Maclaurin* et *d'Alembert* fondent le calcul différentiel sur les limites, « et regardent le rapport des différentielles comme la limite du rapport des « différences finies, lorsque ces différences deviennent nulles (*M. Lagrange*, « *Calcul des Fonctions*, leçon 1re.) »

« Cette manière de représenter les quantités différentielles, ajoute ce « géomètre, ne fait que reculer la difficulté; car, en dernière analyse, le « rapport des différences évanouissantes, se réduit encore à celui de zéro « par zéro. »

« D'ailleurs, on peut observer que c'est improprement qu'on applique le « mot connu de *limite* à ce que devient une expression analytique, lors- « qu'on y fait évanouir certaines quantités, parce que ces quantités, après « avoir décrû jusqu'à zéro, pourraient encore devenir négatives. De même « qu'en géométrie, on ne peut pas dire, à la rigueur, que la sous-tan- « gente soit la limite des sous-sécantes, parce que rien n'empêche la sous- « sécante de décroître encore lorsqu'elle est devenue sous-tangente. »

« Les véritables limites, suivant les notions des anciens, sont des quan- « tités qu'on ne peut passer, quoiqu'on puisse s'en approcher aussi près « que l'on veut : telle est, par exemple, la circonférence du cercle à « l'égard des polygones inscrits et circonscrits, parce que, quelque grand » que devienne le nombre des côtés, jamais le polygone intérieur ne sor- « tira du cercle, ni l'extérieur ni entrera; ainsi, les asymptotes sont de « véritables limites des courbes auxquelles elles appartiennent. »

« Au reste, je ne disconviens pas qu'on ne puisse, par la considération « des limites envisagées d'une manière particulière, démontrer rigoureuse- « ment les principes du calcul différentiel, comme *Maclaurin*, *d'Alembert*, « et plusieurs autres après eux l'ont fait. Mais l'espèce de métaphysique « que l'on est obligé d'y employer est, sinon contraire, du moins étran- « gère à l'esprit de l'analyse qui ne doit avoir d'autre métaphysique que « celle qui consiste dans les premiers principes et dans les opérations fon- « damentales du calcul. »

« Quand on approfondit ces différentes méthodes, ou plutôt ces diffé-

« rentes manières d'envisager la même méthode, on trouve qu'elles n'ont « d'autre but que de donner le moyen d'obtenir séparément le premier « terme du développement d'une fonction $f(x+\Delta x)-fx$, en le déta« chant et l'isolant, pour ainsi dire, du reste de la série, parce que tous « les problêmes dont la solution exige le calcul différentiel, dépendent « uniquement de ce premier terme. »

Dans ce qui va suivre, il faudra soigneusement distinguer entre la diminution de la quantité par voie de division et celle qui a lieu par soustraction. Dans le premier cas, la quantité ne peut devenir nulle, mais elle tend sans cesse vers zéro qui en est la *limite*; dans le second cas, elle passe par zéro, puis elle devient négative, et elle croît indéfiniment sous ce signe. C'est toujours le décroissement par voie de division que nous supposerons.

Deux variables étant chacune fonction d'une même variable, leur rapport est une autre variable fonction de celle-ci, et il peut être représenté par l'ordonnée d'une courbe plane, ayant pour abscisse la variable indépendante ou principale.

Il peut arriver que la variable principale décroissant par voie de division, le rapport s'approche de plus en plus d'un certain terme qu'il ne puisse atteindre. Ce terme est *la limite du rapport* : on le nomme encore *dernière raison* ou *rapport limite*, parce qu'il est le dernier état du rapport variable.

Prenons pour exemple le rapport de la corde au sinus dans un cercle dont le rayon $=1$: en faisant le sinus verse $=x$,

$$\frac{\text{corde}}{\text{sinus}}=\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x-xx}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x}} \quad .\ .\ .\ .\ (1)$$

or, x diminuant successivement par voie de division, c'est-à-dire, s'approchant de plus en plus de zéro, le dénominateur $\sqrt{2-x}$ s'approche en même tems de $\sqrt{2}$, et comme le numérateur est invariable, le rapport tend vers la limite $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$, en sorte que l'unité est la limite du rapport ou la dernière raison de la corde au sinus, ou, en d'autres termes, le dernier rapport de la corde au sinus, est un rapport d'égalité. C'est ce qui fait dire que, dans la limite, on peut prendre la corde pour le sinus, ou réciproquement, et qu'ainsi pour un arc très-peu différent de zéro, la corde diffère très-peu du sinus, ou réciproquement.

En faisant toujours sinus verse $=x$, on a

$$\frac{\sin}{\cos} = \frac{\sqrt{x}.\sqrt{2-x}}{1-x} \quad \ldots\ldots (2)$$

rapport qui aura zéro pour limite.

La dernière raison du sinus au sinus verse, est donnée par

$$\frac{\sin}{\sin \text{vers}} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}{x} = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}} \quad \ldots\ldots (3)$$

rapport qui croît lorsque x diminue, et qui peut devenir plus grand qu'aucune quantité donnée, parce que la limite du numérateur étant $\sqrt{2}$, celle du dénominateur est 0; ainsi la limite de ce rapport est *l'infini*.

Le rapport de la tangente au sinus est, d'après (2),

$$\frac{\text{tang}}{\sin} = \frac{1}{1-x} \quad \ldots\ldots (4)$$

dont la limite est encore l'unité; et il en est de même de celle du rapport

$$\frac{\text{tang}}{\text{cord}} = \frac{\sqrt{2-x}}{(1-x)\sqrt{2}} \quad \ldots\ldots (5)$$

Ainsi, dans la limite, ces trois lignes trigonométriques, le sinus, la corde et la tangente, peuvent être prises l'une pour l'autre, et l'erreur sera d'autant moindre que l'arc auquel ces lignes se rapportent, différera moins de zéro.

Si on prenait isolément les limites de sinus, cosinus, tangente, corde, sinus verse, on trouverait toujours zéro, en sorte que le rapport entre les limites de deux de ces lignes, serait celui de o à o dont la valeur vraie n'est autre chose que la limite du rapport, pour laquelle nous avons trouvé zéro, un nombre ou l'infini.

Lorsque les deux variables ne peuvent plus être exprimées, comme dans les exemples ci-dessus, au moyen d'une troisième variable, il faut recourir à une autre voie pour obtenir le rapport limite.

Cherchons, par exemple, la limite du rapport entre l'arc et le sinus, sans supposer la série qui donne le développement du sinus au moyen de l'arc : à cet effet, nous partirons de ce théorême connu,

$$\text{tang} > \text{arc} > \sin, \quad \text{d'où} \quad \frac{\text{tang}}{\sin} > \frac{\text{arc}}{\sin} > 1 \quad \ldots\ldots (6)$$

d'où l'on conclut

$$\text{limite}\left(\frac{\text{arc}}{\sin}\right) < \text{limite}\left(\frac{\text{tang}}{\sin}\right),$$

$$\text{limite}\left(\frac{\text{arc}}{\sin}\right) > \text{limite } 1 \quad \text{ou} > 1 :$$

or la limite de la tangente au sinus étant l'unité, on doit avoir en même tems

$$\text{limite}\left(\frac{\text{arc}}{\sin}\right) < 1 \quad \text{et} > 1,$$

par où il faut entendre que dans la limite, le rapport de l'arc au sinus est compris entre l'unité et l'unité, et qu'ainsi il devient un rapport d'égalité. On a encore

$$\text{tang} > \text{arc} > \text{cord}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\text{tang}}{\text{cord}} > \frac{\text{arc}}{\text{cord}} > 1 \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

d'où on conclurait, comme précédemment, que dans la limite $\frac{\text{arc}}{\text{cord}} = 1$. Ainsi, l'arc étant très-près de zéro, on peut sensiblement prendre l'arc au lieu de son sinus ou de sa corde, et réciproquement.

Ce n'est donc qu'autant que le rapport limite entre deux variables, est l'unité, qu'on peut prendre, dans le voisinage de la limite, l'une de ces grandeurs pour l'autre.

On a trouvé l'infini pour limite du rapport $\frac{\sin}{\sin \text{vers}}$, ce qui veut dire que pour un sinus verse nul, ou très-peu différent de zéro, le sinus est infini par rapport au sinus verse. Pour expliquer la chose dans le langage des infiniment petits, recourons aux développemens de sinus et cosinus au moyen de l'arc : on a

$$\sin y = y - \frac{y^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$\sin \text{vers}\, y = 1 - \cos y = \frac{y^2}{1.2} - \frac{y^4}{1.2.3.4};$$

or, l'arc étant extrêmement petit, on peut prendre l'arc y pour $\sin y$, et, à plus forte raison, $\frac{y^2}{2}$ pour $\sin \text{vers}\, y$; donc

$$\sin y = y, \quad \sin \text{vers}\, y = \frac{y \cdot y}{2};$$

mais le sinus verse étant le produit de deux facteurs y, dont chacun est infiniment petit, tandis que $\sin y$ est le produit de y par l'unité, $\sin \text{vers}\, y$ est infiniment petit par rapport à $\sin y$, ou réciproquement, $\sin y$ est infiniment grand par rapport à $\sin \text{vers}\, y$. Ainsi, lorsqu'un rapport limite est infini, on dit, dans le langage des infiniment petits, que le numérateur étant un infiniment petit du premier ordre, le dénominateur est un infiniment petit du second ordre, c'est-à-dire, un produit de deux infiniment petits du premier ordre.

Pour un arc y très-peu différent de sa limite zéro, ou infiniment petit du premier ordre, on rejette des séries du sinus et du cosinus les termes qui suivent le premier, comme négligeables par rapport à celui-là qui est un infiniment grand par rapport à eux, en sorte qu'on prend

$$\sin y = y, \quad \cos y = 1,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\sin y}{\cos y} = \frac{y}{1} = 0,$$

Lors donc que le rapport limite est nul, on dit, dans la théorie des infiniment petits, que le numérateur est infiniment petit par rapport au dénominateur.

Reprenons les développemens des rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \ldots \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$, trouvés (pag. 15) : le premier terme de chacun de ces développemens, est indépendant du Δx, tandis que les suivans sont multipliés par les puissances successives de cet accroissement. Si donc on suppose que Δx diminue continuellement par voie de division, de manière à devenir successivement $\frac{\Delta x}{10}$, $\frac{\Delta x}{100}$, $\frac{\Delta x}{1000}$, etc., la variable x restant indéterminée, la somme de tous les termes multipliés par Δx, pourra devenir moindre que toute quantité donnée, quelque petite qu'elle soit; mais le premier terme de chacun de ces développemens, ou le terme sans Δx, ne varie pas lors de ces décroissemens du Δx; donc il est cette quantité dont le rapport approche de plus en plus sans pouvoir l'atteindre, et de manière à en différer d'aussi peu qu'on voudra : il est donc, d'après l'acception du mot, la limite du rapport.

C'est dans la détermination de ces premiers termes, pour chaque fonction donnée, que consiste la méthode qu'on appelle calcul différentiel.

On conçoit que ces notations $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ ...., ne sont plus propres à représenter les limites des développemens; on est convenu, pour noter ces limites, de changer partout Δ en d, ce qui donne ces équations identiques,

$$(A) \ldots \frac{dy}{dx} = P, \frac{d^2y}{dx^2} = Q, \frac{d^3y}{dx^3} = R, \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = U, \frac{d^ny}{dx^n} = V.$$

Puisque la limite n'est que le premier terme du développement ordonné suivant les puissances du Δx, on est naturellement conduit à cette abréviation de calcul, dans la détermination des limites successives :

Former les différences de tous les ordres de la fonction donnée, mais en se bornant pour chacune d'elles au premier terme du développement, changer le Δ en d, puis diviser par dx, dx^2...., et on a les limites demandées.

On est convenu de nommer différentielles successives d'une fonction, cette partie des différences de tous les ordres, propre à donner les limites, et dans laquelle on a changé le signe Δ en d.

Les limites se déduisent donc des différentielles, en divisant celles-ci par dx, dx^2....

Réciproquement, on repasse des limites aux différentielles, en considérant $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., qui ne sont que des notations de limites, comme de véritables quotiens, et multipliant les deux membres des équations identiques (A) par dx, dx^2, dx^3....

Les facteurs de dx, dx^2, dx^3...., dans les différentielles successives, facteurs qui sont les limites, se nomment coefficiens différentiels.

En partant de la notion de limite, on parvient facilement au coefficient différentiel du premier ordre des fonctions transcendantes. D'abord pour l'exponentielle a^x on fera le développement de $a^{\Delta x}$ jusqu'à la première puissance de Δx (chap. IV), et on aura $\frac{\Delta y}{\Delta x} = Aa^x +$ etc.; et, pour la limite, $\frac{dy}{dx} = Aa^x$: on déduira de là les coefficiens successifs dont on reportera

les valeurs dans la série de *Taylor*, et on déterminera A, comme nous l'avons fait (chap. IV). Pour sin x, on aura

$$\sin(x + \Delta x) = \sin x \cos \Delta x + \sin \Delta x \cos x;$$

or, $\cos \Delta x = (1 - \sin^2 \Delta x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 \Delta x - \frac{1}{8}\sin^4 \Delta x + \text{etc.}:$

donc $$\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \cos x \,.\, \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - \frac{1}{2}\sin x \sin \Delta x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}$$
$$- \frac{1}{8}\sin x \,.\, \sin^3 \Delta x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} + \text{etc.}:$$

or, dans la limite, $\Delta x = 0$, $\sin \Delta x = 0$ et $\dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$;

donc $$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x.$$

On a $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, π étant la demi-circonférence;

donc $$d(\cos x) = d\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\} = -\sin x \,.\, dx.$$

Comme on sait déduire la différentielle du logarithme de celle de l'exponentielle, et les différentielles de toutes lignes trigonométriques et des arcs donnés par ces lignes de celles du sinus et du cosinus, nous nous bornerons à ce peu de mots sur la différentiation.

On pourrait appliquer immédiatement le principe des limites à la recherche des équations différentielles.

Reprenons à cet effet l'équation (pag. 66),

$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0.$$

Ecrivant $x + \Delta x$ pour x, auquel cas y, fonction de x, devient $y + \Delta y$, l'équation variée subsistera en même tems que la proposée, puisque $x + \Delta x$ n'est qu'une autre valeur de x, et que $y + \Delta y$ est la valeur de y qui lui correspond : si de cette équation variée, on retranche l'équation primitive, et qu'on divise par Δx, on trouve

$$(2y + \Delta y - 2mx)\frac{\Delta y}{\Delta x} - 2m\Delta y + \Delta x - 2my + 2x = 0.$$

Cette équation étant vraie pour toutes les valeurs de Δx, puisque la proposée a lieu pour des valeurs quelconques de Δx, on peut supposer que x

diminue continuellement par voie de division ; il tendra vers zéro ainsi que Δy, et on aura ainsi une suite d'équations de même forme, dont les premiers membres tendent de plus en plus vers une limite qui correspond à $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{0}$, et que nous noterons par $\frac{dy}{dx}$: on aura donc pour l'équation limite

$$(y - mx)\frac{dy}{dx} - my + x = 0 = (y - mx)y' - my + x,$$

qui est l'équation trouvée (pag. 66). Elle est, en quelque sorte, la dernière de la suite des équations que nous venons de considérer.

Pour passer à l'équation dérivée du second ordre, on écrira, dans l'équation aux différences trouvée plus haut, $x + \Delta x$ pour x, $y + \Delta y$ pour y, et on représentera par $\Delta y'$ ce que devient Δy : le résultat de ces substitutions sera

$$\{2(y + \Delta y) + \Delta y' - 2m(x + \Delta x)\}\frac{\Delta y'}{\Delta x} - 2m\Delta y' + \Delta x - 2m(y + \Delta y) + 2(x + \Delta x) = 0:$$

or on a

$$\Delta y' - \Delta y = \Delta^2 y, \quad \text{d'où} \quad \Delta y' = \Delta y + \Delta^2 y,$$

donc

$$\{2(y + \Delta y) + \Delta y + \Delta^2 y - 2m(x + \Delta x)\}\frac{\Delta^2 y + \Delta y}{\Delta x} - 2m(\Delta y + \Delta^2 y) + \Delta x - 2m(y + \Delta y) + 2(x + \Delta x) = 0;$$

retranchant la première équation aux différences et divisant par Δx, on parvient à ce résultat

$$(2y - 2mx + 4\Delta y - 4m\Delta x)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)^2 \Delta x^2 + 2\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 - 4m\frac{\Delta y}{\Delta x} + 2 = 0;$$

et pour $\Delta x = 0$, à celui-ci,

$$(y - mx)\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2m\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

c'est-à-dire,

$$(y - mx)y'' + y'^2 - 2my' + 1 = 0,$$

qui est l'équation (3) (pag. 67).

M. *Carnot*, dans ses *Réflexions sur la métaphysique du Calcul infinitésimal*, où il discute avec une rare sagacité les principes de ce calcul, observe qu'en vertu de la loi de continuité, les quantités évanouissantes gardent encore le rapport dont elles se sont approchées par degrés avant de s'évanouir.

Quelques personnes ont été d'avis de démontrer d'abord les règles de la différentiation des fonctions algébriques et transcendantes, après quoi elles donnent le théorème de *Taylor* qui sert à effectuer les développemens en série des fonctions dont on a déja assigné les coefficiens différentiels successifs; mais cette marche exige qu'on ait d'abord établi cette proposition : *toute fonction d'une seule variable, comporte une différentielle première de la forme* Pdx, *le coefficient* P *ne pouvant devenir nul ou infini, tant que la variable* x *reste indéterminée*. Nous allons donc en donner la démonstration trouvée par M. *Ampère*, professeur à l'École Polytechnique, et simplifiée par M. *Binet* aîné, répétiteur à la même École. Nos lecteurs jugeront peut-être qu'autant valait-il commencer par le théorème de *Taylor*.

Considérons une fonction $y = fx$ qui ne devienne pas infinie et qui soit soumise à la loi de continuité dans l'intervalle de $x = a$ à $x = a + b$, et soit $b = ni$, n étant arbitraire, et conséquemment i étant déterminé; la fonction $\frac{f(x+i) - fx}{i}$ ou $\frac{Y-y}{i}$ ne contiendra que la variable x; de plus cette fonction ne deviendra pas infinie et sera continue dans le même intervalle, puisqu'il en est ainsi des fonctions Y et y. Faisons x successivement égal à

$$a \quad a+i, \quad a+2i, \quad a+3i, \ldots\ldots a+(n-1)i, \quad a+b,$$

et soient

$$A, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3, \ldots\ldots \quad A_{n-1} \quad B$$

les valeurs correspondantes de y: celles de Y ou $f(x+i)$ seront visiblement

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad A_4 \ldots\ldots \quad B$$

d'où il suit que $\frac{Y-y}{i}$ deviendra

$$\frac{A_1-A}{i}, \ \frac{A_2-A_1}{i}, \ \frac{A_3-A_2}{i}, \ \frac{A_4-A_3}{i}, \ldots \ \frac{B-A_{n-1}}{i} \ldots\ldots (M),$$

ajoutant ces n fractions, on aura pour somme, après les réductions, $\frac{B-A}{i}=\frac{n(B-A)}{ni}=\frac{n(B-A)}{b}$. On remarquera que $\frac{B-A}{b}$ étant la n^{me} partie de la somme des n fractions (M), ces dernières fractions ne peuvent être toutes plus petites ou toutes plus grandes que $\frac{B-A}{b}$, puisque, dans le premier cas, un nombre n de ces fractions, ne pourrait faire une somme aussi grande que $\frac{B-A}{b}$, et que, dans le second, il ne pourrait faire une somme aussi petite; il faut donc que, parmi les fractions (M), les unes soient plus petites et les autres plus grandes que $\frac{B-A}{b}$. Il suit de là que i, a et b étant des quantités déterminées, si l'on fait varier x depuis a jusqu'à b par des degrés très-rapprochés, la fonction $\frac{Y-y}{i}$ devra, en vertu de la loi de continuité supposée, et à laquelle la grandeur est assujétie dans ses changemens, prendre toutes les valeurs depuis $\frac{A_1-A}{i}$ jusqu'à $\frac{B-A_{n-1}}{i}$: il y aura donc d'après un théorême connu et démontré (*Alg.*, 1re. sect.), une valeur de x qui rendra $\frac{Y-y}{i}=\frac{B-A}{b}$.

Prenons une autre quantité $c<b$ et commensurable avec b, en sorte que $\frac{b}{c}=\frac{n}{m}$, ou que b étant, comme on l'a supposé, $=ni$, on ait $c=mi$: on démontrera de la même manière qu'il existe une valeur de x entre a et c pour laquelle $\frac{Y-y}{i}=\frac{B-C}{c}$, C étant la valeur de y qui répond à $x=a+c$.

Les valeurs que reçoit la fonction $\frac{Y-y}{i}$ pour les valeurs de x depuis $x=a$, jusqu'à $x=a+b$, seront d'autant plus nombreuses et plus rapprochées entre les limites $\frac{A_1-A}{i}$ et $\frac{B-A_{n-1}}{i}$, qu'on aura pris l'accroissement i plus petit et n plus grand, de telle sorte que in soit toujours $=b$; mais à cause de $i=\frac{b}{n}$, on peut supposer aussi que l'ac-

croissement i ayant d'abord été pris très-petit, ne varie plus pendant que b et n décroîtront, en sorte que la première valeur $\frac{A_1-A}{i}$ reste la même ; alors, la dernière restera comprise entre les limites des valeurs précédentes de $\frac{Y-y}{i}$. On pourra donc, en conservant la première limite $\frac{A_1-A}{i}$, en rapprocher indéfiniment la seconde.

Ainsi, $\frac{B-A}{b}$ est composé d'une quantité invariable $\frac{A_1-A}{i}$ indépendante de b, et d'une autre quantité α qui diminue indéfiniment avec b, en sorte qu'on peut poser

$$\frac{B-A}{b}=p+\alpha,$$

p étant une fonction de a, et il est facile de prouver qu'il ne peut d'ailleurs exister une autre fonction q de a qui remplisse la même condition : car si on pouvait avoir

$$\frac{B-A}{b}=q+\beta,$$

on aurait

$$p+\alpha=q+\beta,$$

d'où l'on déduirait nécessairement $p=q$, $\alpha=\beta$ (pag. 469 et 470).

Concluons de là que si aucune valeur de x depuis x jusqu'à $x+i$ ne rend fx infinie, le rapport $\frac{f(x+i)-fx}{i}$ sera composé d'une fonction α qui décroîtra indéfiniment avec i qui remplace b, et d'une fonction de x que nous désignerons par y', fonction qui est le coefficient différentiel du premier ordre, et en même tems la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ou du rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable.

On peut encore déduire de là une démonstration de ce théorême établi (pag. 432) : *si* $y=fx$ *ne devient pas infinie de* $x=a$ *à* $x=a+b$, *et si* y' *conserve le même signe, ce signe sera celui du rapport de l'ac-*

croissement de la fonction à l'accroissement de la variable. En effet, α pouvant être rendu aussi petit qu'on voudra, chacune des valeurs de $\frac{f(x+i)-fx}{i}=y'+\alpha$, pour toutes les valeurs de x depuis x jusqu'à $x+i$, aura le signe de y' qui sera celui de leur somme, et par conséquent de $\frac{B-A}{b}$.

Lorsqu'on sait déjà former les coefficiens différentiels de tous les ordres ou les dérivées successives d'une fonction quelconque d'une seule variable, on peut passer à la démonstration suivante de la série de *Taylor*, donnée par M. *Ampère*: en partant de l'identité

$$f(x+i)=y+y'i+\alpha i \text{ etc.},$$

trouvée ci-dessus, remplaçant $x+i$ par h, et désignant par P ce que devient $y'+\alpha$ après la substitution de $h-x$ pour i qui reste dans α; ce qui donne

$$fh=y+P(h-x);$$

il prend des deux membres les dérivées successives, en ne faisant varier que x; en sorte qu'il obtient

$$\left.\begin{array}{l} 0=y'+P'(h-x)-P \\ 0=y''+P''(h-x)-2P' \\ 0=y'''+P'''(h-x)-3P'' \\ 0=y^{\text{IV}}+P^{\text{IV}}(h-x)-4P''' \\ \quad\text{etc.}\end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} P=y'+P'(h-x) \\ P'=\frac{1}{2}y''+\frac{1}{2}P''(h-x) \\ P''=\frac{1}{3}y'''+\frac{1}{3}P'''(h-x) \\ P'''=\frac{1}{4}y^{\text{IV}}+\frac{1}{4}P^{\text{IV}}(h-x) \\ \quad\text{etc.};\end{array}\right.$$

conséquemment

$$fh=y+y'(h-x)+\tfrac{1}{2}y''(h-x)^2+\frac{1}{2.3}y'''(h-x)^3 + \frac{1}{2.3.4}y^{\text{IV}}(h-x)^4+\text{etc.}$$

et, à cause de $h=x+i$,

$$f(x+i)=y+y'i+y''\frac{i^2}{1.2}+y'''\frac{i^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

ce qui est la série connue et démontrée de plusieurs manières.

Les applications du calcul différentiel aux courbes, reposent sur le principe suivant.

Soient trois expressions

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.},$$
$$A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \text{etc.},$$
$$A'' + B''x + C''x^2 + D''x^3 + \text{etc.},$$

telles que, pour toutes les valeurs de x, *les valeurs de la seconde se trouvent toujours comprises entre celles de la première et de la troisième; si ces deux dernières expressions ont le même premier terme, il sera nécessairement égal à celui de la seconde, c'est-à-dire, qu'ayant* $A = A''$, *on en pourra conclure* $A = A'$.

En effet, si l'on prend le rapport entre la première série et la troisième, on aura $\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}}{A'' + B''x + C''x^2 + D''x^3 + \text{etc.}}$, fraction dont la limite est $\frac{A}{A''} = 1$, parce que $A = A''$; mais puisque la seconde série est toujours comprise entre celles-ci qui tendent vers l'égalité, lorsque $A = A''$, et que x va en décroissant, elle doit pouvoir se rapprocher indéfiniment de l'une et de l'autre: donc, les rapports de ces trois séries prises deux à deux, doivent tendre sans cesse vers l'unité: et comme la limite du rapport entre les deux premières est $\frac{A}{A'}$, on doit avoir $\frac{A}{A'} = 1$, d'où $A = A' = A''$.

On fait encore usage du principe suivant que quelques auteurs ont pris pour base de la géométrie.

a et b étant des quantités constantes, α et β des grandeurs variables qu'on peut rendre aussi petites qu'on veut, si l'équation

$$a + \alpha = b + \beta,$$

doit avoir lieu quelque petits que soient α et β, cette équation se partagera dans les deux suivantes,

$$a = b, \quad \alpha = \beta,$$

dont la dernière a lieu pour tous les états de grandeur de α et β. En effet, si on supposait

$$a = b \pm k,$$

k étant constant, on aurait

$$a - b = \beta - \alpha = \pm k, \text{ d'où } \beta = \alpha \pm k,$$

résultat absurde, puisque α décroissant indéfiniment suivant l'hypothèse, il n'en serait plus de même de β, ce qui serait contre la même hypothèse.

Quadrature des courbes.

Fig. 56. L'ESPACE $PMOM'P'$ est toujours compris entre les rectangles $PMmP'$ et $Pm'M'P'$ dont le premier a pour expression $PM.PP' = iy$ et le second

$$P'M'.PP' = \left(y + \frac{dy}{dx}i + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{i^2}{2} + \text{etc.}\right)i;$$

c'est donc entre iy et $yi + \frac{dy}{dx}i^2 + \text{etc.}$, que doit se trouver compris le développement de l'aire $PP'MOM'$: or, ces développemens ont le même premier terme iy ; il faudra donc, conformément au principe (pag. 469), égaler à iy le premier terme du développement de l'aire $PP'M'OM$: or, en désignant par E l'espace APM fonction de $AP = x$, si x devient $x + i$, E devient

$$AP'M'MA = E + \frac{dE}{dx}i + \frac{d^2E}{dx^2}\frac{i^2}{2} + \text{etc.},$$

d'où

$$PP'M'OM = \frac{dE}{dx}i + \frac{d^2E}{dx^2}\frac{i^2}{2} + \text{etc.};$$

ainsi,

$$PP'mM = yi,$$

$$PP'M'OM = \frac{dE}{dx}i + \frac{d^2E}{dx^2}\cdot\frac{i^2}{2} + \text{etc.},$$

$$PP'M'm' = yi + \frac{dy}{dx}i^2 + \text{etc.},$$

et conséquemment,

$$i\frac{dE}{dx} = iy, \text{ d'où } dE = y\,dx.$$

Rectification des courbes.

Le triangle rectangle $MM'm$ donne pour la corde de l'arc MOM', Fig. 60.

$$MM' = \sqrt{\overline{Mm}^2 + \overline{M'm}^2};$$

or, en prenant $Mm = i$, on a

$$M'm = k = \frac{dy}{dx}i + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \text{etc.} = (p + Pi)i,$$

en dénotant $\frac{dy}{dx}$ par p, et $\frac{d^2y}{dx^2}\frac{i}{2} + \frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{i^2}{1.2.3} + \text{etc.}$ par Pi.
D'après ces dénominations,

$$MM' = \sqrt{i^2 + (p + Pi)^2 i^2} = i\sqrt{1 + (p + Pi)^2}:$$

menant ensuite la tangente MN, on trouvera

$$Nm = Mn \,.\, \text{tang}\, NMm = \frac{dy}{dx}i = pi,$$

$$MN = \sqrt{\overline{Mm}^2 + \overline{Nm}^2} = \sqrt{i^2 + p^2 i^2} = i\sqrt{1 + p^2},$$
$$M'N = Nm - M'm = -Pi^2,$$

d'où on conclut

$$\frac{MN + NM'}{MM'} = \frac{i\sqrt{1 + p^2} \quad - Pi^2}{i\sqrt{1 + (p + Pi)^2}} = \frac{\sqrt{1 + p^2} \quad - Pi}{\sqrt{1 + (p + Pi)^2}}.$$

Lorsque $i = 0$, ce rapport devient

$$\frac{\sqrt{1 + p^2}}{\sqrt{1 + p^2}} = 1.$$

On voit aussi qu'il en est de même du rapport entre l'arc MOM' et la partie MN de la tangente comprise entre les deux ordonnées PM et $P'M'$, puisque l'expression

$$\frac{MN}{MM'} = \frac{i\sqrt{1 + p^2}}{i\sqrt{1 + (p + Pi)^2}},$$

a pour limite l'unité, en observant que cette circonstance n'a lieu que parce que les axes coordonnés sont à angle droit.

L'arc MOM' étant toujours compris entre MM' et $MN + NM'$, son développement le sera entre ceux des expressions

$$i\sqrt{1+(p+Pi)^2} \quad \text{et} \quad i\sqrt{1+p^2} \quad -Pi^2:$$

or

$$i\sqrt{1+(p+Pi)^2} = i\left\{1+p^2+2Ppi+P^2i^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$= i\left\{1+p^2+i(2Pp+P^2i)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$= i(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + Qi^2:$$

or, ce résultat qui représente MM', ayant le même premier terme que $MN + NM'$, il suit de ce qui a été démontré (pag. 469), que le développement de l'arc MOM', intermédiaire entre MM' et $MN + NM'$, aura également $i\sqrt{1+p^2}$ pour premier terme : or, en désignant par s l'arc AM, on sait que s est une fonction de x, qui, lorsque x se change en $x + i$, devient

$$AM + MOM' = s + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}i + \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}x^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \text{etc.},$$

d'où

$$MOM' = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}i + \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}x^2}\,\frac{i^2}{1.2};$$

et conséquemment,

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1+p^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}:$$

cette formule et la précédente ont été trouvées (pag. 257 et 263).

Cubature des volumes de révolution.

Fig. 58. TROUVER l'expression du volume engendré par la révolution autour de l'axe des abscisses de l'espace APM, volume qui est fonction de x. Soit V ce volume qui devient $V + \Delta V$ lorsque x se change en $x + i$: on aura toujours ΔV plus grand que le volume du cylindre engendré par

le parallélogramme $PP'mM$, et moindre que celui du cylindre engendré par la révolution du parallélogramme $PP'M'm'$: or en désignant par π la circonférence dont le diamètre $= 1$, on a

$$\text{vol. cyl. } PP'mM = \pi y^2 i,$$

$$\text{vol. cyl. } PP'M'm' = \pi (y + k)^2 i = \pi iy^2 + 2\pi iky + \pi ik^2.$$

D'ailleurs,

$$\text{vol. de } MPP'M' = \frac{dV}{dx} i + \frac{d^2V}{dx^2} \cdot \frac{i^2}{2} \text{ etc.},$$

donc, d'après le principe,

$$\frac{dV}{dx} = \pi y^2, \quad \text{d'où} \quad dV = \pi y^2 dx:$$

formule trouvée (pag. 354).

Mesure des surfaces de révolution.

Si on suppose que la courbe AMM' tourne autour de l'axe des abscisses, l'arc AM engendrera une surface conoïdique que nous représenterons par surf. AM : et nous désignerons par Δ surf. AM celle qui sera décrite par la révolution de l'arc MOM'. Or, on a Fig. 60.

surf. arc $MOM' >$ surf. du cône tronqué qui a pour côté corde MM',

et $<$ surf. du cône tronqué qui a pour côté tang MN,

+ différence des cercles concentriques dont les rayons sont $P'N$ et $P'M'$.

Traduisant toutes ces surfaces, on trouve

$$\text{surf. du cône tronqué de la corde } MM' = i\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \times 2\pi\left(\frac{2y+k}{2}\right)$$

$$= 2\pi iy\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \pi ik\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\text{surf. du cône tronqué de tang } MN = 2\pi\left(y+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot i\right) i\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\text{surf. du cercle } P'M' = \pi\,(y^2 + 2ky + k^2)$$

surf. cercle $P'N = \pi \left\{ y^2 + 2iy\frac{dy}{dx} + i^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}$,

$$\text{diff. de ces deux surfaces} = \pi y\left(\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \text{etc.}\right) + \text{etc.};$$

en observant que $k = \frac{dy}{dx}\,i + \frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{i^2}{1.2} + \text{etc.}$

Or, les surfaces qui interceptent l'aire engendrée par l'arc MOM', ont le même premier terme $2\pi iy\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, donc, d'après le principe,

$$\text{surf. arc } MOM' = 2\pi iy\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= 2\pi y dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2\pi y ds,$$

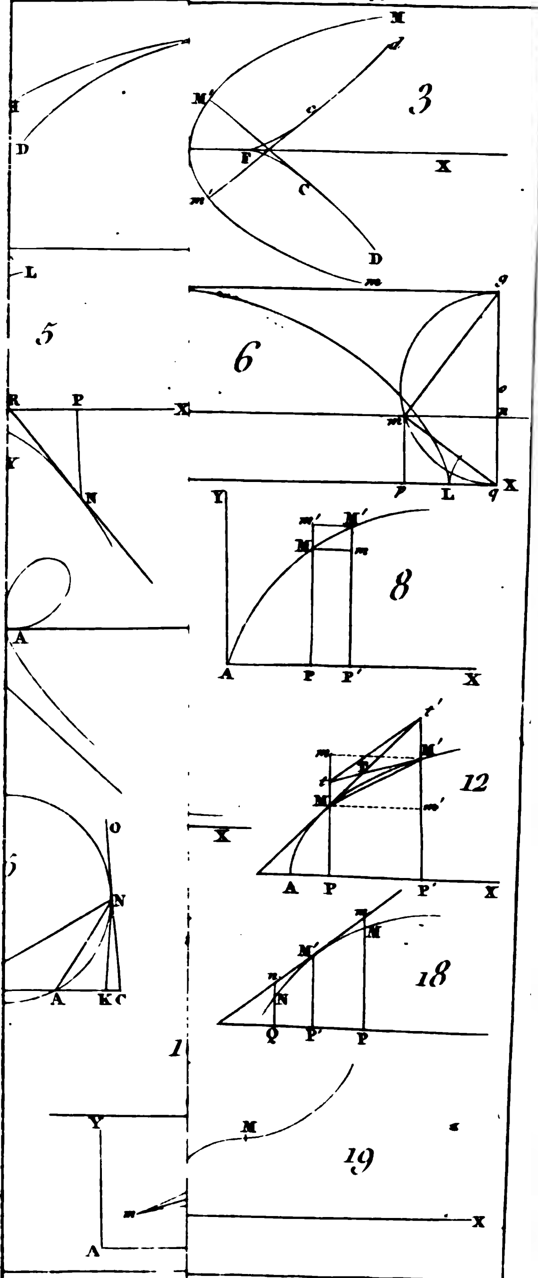
en observant qu'on a trouvé plus haut arc $MOM' = ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, conséquemment

$$\text{surf. arc } AM = 2\pi \int y ds,$$

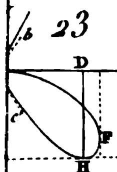
comme on l'a trouvé dans le texte (page 336).

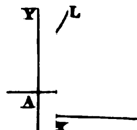
Nous croyons en avoir assez dit pour mettre le lecteur à portée d'appliquer le principe à la recherche des expressions des volumes et des aires qui ne sont pas de révolution; et d'ailleurs il trouvera dans le texte les expressions des volumes et des aires limites.

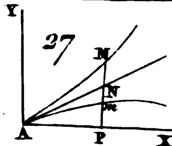
FIN.

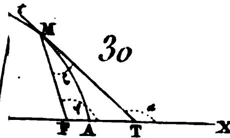

3
M
d
M'
c
F
X
C
m'
D
m
H
D
L
5
6
g
o
n
m
p
L
q
X
R
P
X
Y
N
A
Y
m'
M'
M
m
8
A
P
P'
X
t'
m
M'
t
M
m'
12
A
P
P'
X
X
O
N
A
K
C
m
M
M'
n
N
18
Q
P'
P
1
Y
M
19
m
X
A

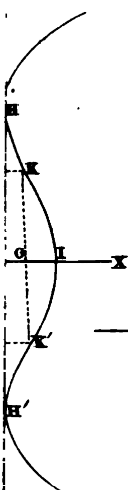
Cal. diff. Pl. 2.

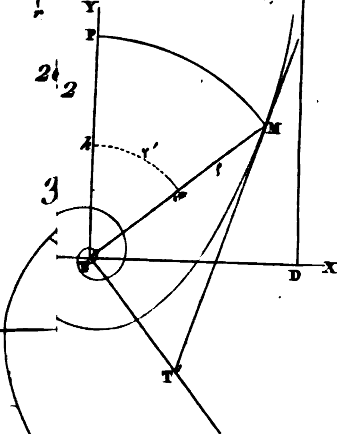

23
D
F
H

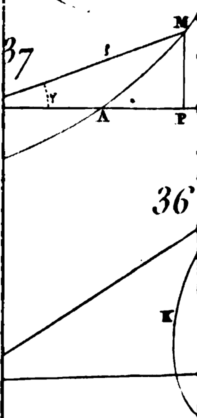

Y
L
A
K

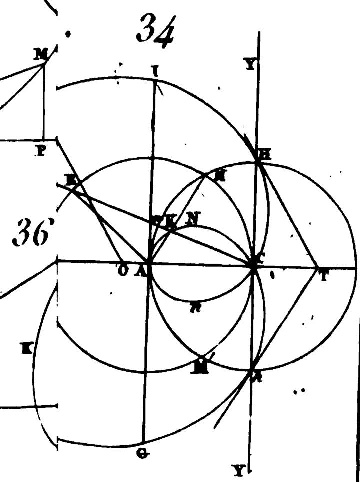

Y
27
M
N
m
A
P
X

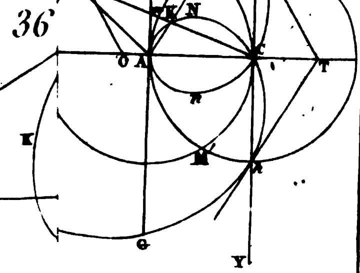

M
30
P
A
T
X

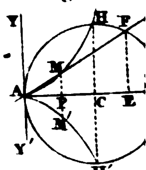

H
K
G
I
X
K′
H′

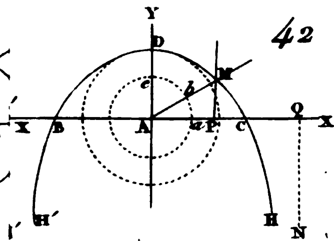

Y
P
S
M
T′
D
X

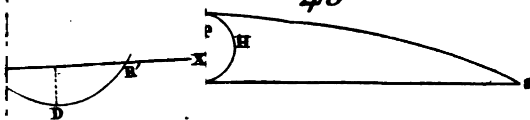

M
A
P
K

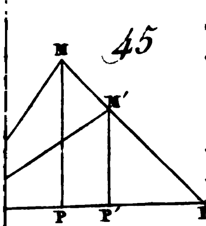

34
I
Y
H
M
K
N
O
A
C
T
M′
G
Y

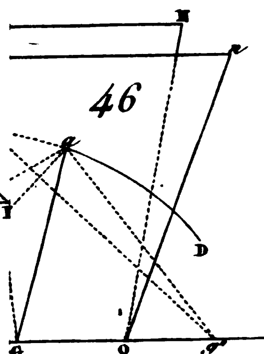

36

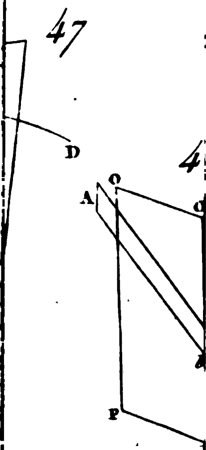

39
Y
H
F
M
A
P
C
E
M'
Y'
H'

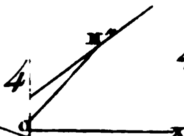

Y
42
D
M
c
b
X
B
A
a
P
C
Q
X
H'
H
N

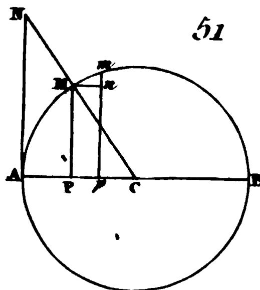

43
X
E'
D
P
H
S

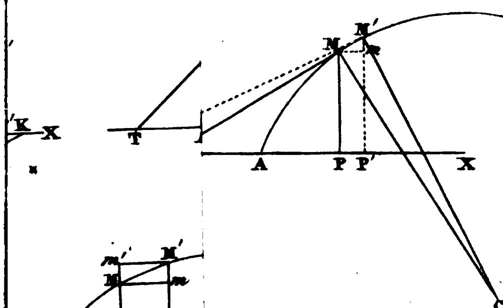

M
45
M'
P
P'

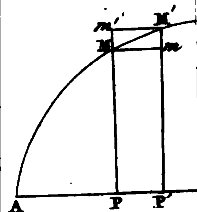

46
a
D
G
O

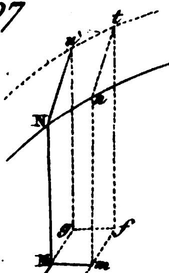

47
D
A
O
P

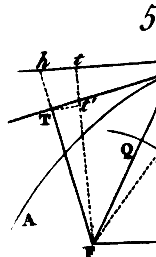

49
X

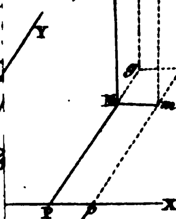

N
51
m
M
n
A
P
p
C
B

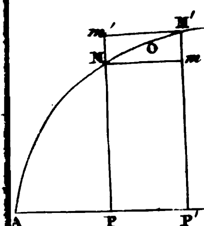

53
M
M'
m
K
X
T
A
P
P'
X
C

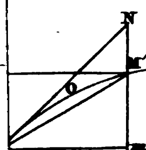

m'
M'
M
m
A
P
P'


57
t
n'
n
N
g
f
M
m
P
p
X


Y
h
t
T
t'
Q
A
F




59
m'
M'
N
o
m
A
P
P'


N
M'
O
60
m
P'
X

